УДК 517.927.9, 519.62

А.В. Синицын[1], Э. Рохас[1]

[1] *Национальный Университет Колумбии, г. Богота, Колумбия*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПЛОСКОГО ВАКУУМНОГО ДИОДА КАК ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ[1]

Аннотация. Изучается стационарная самосогласованная задача магнитной изоляции для вакуумного диода при пространственно-зарядовом ограничении, описываемая сингулярно возмущенной (асимптотика Чайлд-Ленгмюра) системой Власова-Максвелла размерности 1.5. Рассматриваются два режима работы диода. Первый, когда электроны достигают анода – неизолирующий диод, и второй, когда электроны под действием магнитного поля возвращаются обратно к катоду – изолирующий диод. При этом возникает высокоэнергетический слой электронов вблизи катода, приводящий к задаче со свободной границей на потенциалы электромагнитного поля. Получены теоремы существования решений предельной задачи, описываемой сингулярной нелинейной краевой задачей. Развивается техника нижних-верхних решений для сингулярных систем без условий квазимонотонности. Построены численные алгоритмы решения предельной задачи. Проведен анализ верхних-нижних решений, и показана их хорошая согласуемость с численными экспериментами. Так как система уравнений является сингулярной в начальной точке $t = 0$ и совпадает с определением жесткой системы ОДУ по Гиру, то мы рассматриваем комбинированный подход для решения краевой сингулярной задачи и оценки параметров.

Ключевые слова: система Власова-Максвелла, сингулярная краевая задача, нижнее – верхнее решение, эффективный потенциал, численное решение.

A.V.Sinitsyn[1],E.Rojas[1]

[1] *Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia*

INVESTIGATION OF THE LIMIT MODEL OF THE PLANE VACUUM DIODE AS A PARAMETRIC SINGULAR CAUCHY PROBLEM WITH BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. We study the stationary self-consistent problem of magnetic isolation for a vacuum diode with a space – charge limitations, described by a singularly perturbed (Child-Langmuir asymptotic) Vlasov-Maxwell system of dimension 1.5. Two modes of operation of the diode are considered. The first, when the electrons reach the anode is a non-insulating diode, and the second, when the electrons return under the influence of a magnetic field back to the cathode, is an insulating diode. In this case, a high-energy layer of electrons arises near the cathode, leading to a problem with a free boundary on the potentials of the electromagnetic field. Existence theorems are obtained for solutions of the limit problem described by a singular nonlinear boundary value problem. The technique of lower-upper solutions for singular systems without quasi-monotonicity conditions is being developed. Numerical algorithms for solving the limiting problem are constructed. The analysis of the upper-lower solutions is carried out, and their good compatibility with numerical experiments is shown. Since the system of equations is singular at the initial point t = 0 and coincides with the definition of a rigid system of ODEs according to Gear, we consider a combined approach to solve a boundary singular problem and estimate parameters.

Keywords: Vlasov-Maxwell system, singular boundary value problem, lower-upper solution, numerical solution

Введение. В данной статье рассматривается задача моделирования плоского вакуумного диода в магнитном поле в постановке Abdallah, Degond, Mehats [1]. Современная постановка задачи магнитной изоляции была сформулирована физиками в конце 80-х годов прошлого века. В последние годы она интенсивно изучалась группой математиков из Тулузского университета. Затем данные исследования были продолжены

[1] Несмотря на то, что в статье А.В. Синицына и Э. Рохаса превышен лимит на объем, редакция посчитала целесообразным ее опубликовать в данном номере в виду высокой научной ценности и смысловой неделимости на части. Кроме того, настоящая статья является первой работой известных ученых из зарубежного университета и ее издание в нашем журнале может способствовать росту популярности журнала в научном сообществе.

авторами статьи. Несмотря на ряд успешных теоретических результатов, проблема численного моделирования задачи магнитной изоляции оказалось очень сложной и, до настоящего времени, оставалась не решенной.

Очевидно, что наибольший интерес имеет моделирование полной задачи, записываемой как система уравнений с частными производными и представляющую собой общую релятивистскую систему Власова-Максвелла размерности 1.5. При этом исходная задача формулируется как краевая, в которой уравнения системы зависят от двух *внутренних* параметров: плотности тока и собственного магнитного поля возле катода. Фактически мы хотим сказать, что эти параметры изначально неизвестны и определяются собственно краевыми условиями.

С учетом сказанного, особый интерес представляет разрешимость (поиск параметров по краевым условиям) некой упрощенной задачи. В том случае, если характер поведения ее решений будет соответствовать (до некоторой степени) физической модели, то найденные значения параметров можно использовать как начальное приближение в полной системе.

Забегая вперед укажем, что упомянутая система, представляющая собой систему дифференциальных уравнений второго порядка и называемая в дальнейшем **предельной**, является сингулярной в точке $x = 0$ в том смысле, что вторые производные в начальной точке разрывны. При этом в окрестности нуля предельная система совпадает с определением Гира жесткой системы ОДУ. Это означает, что для ее решения можно воспользоваться классическими методами Гира для решения собственно системы дифференциальных уравнений, во-первых. Во-вторых, неявная зависимость параметров модели от краевых условий требует задания замкнутой связи в виде нелинейной функции. Так как характер аналитической зависимости неизвестен, мы можем воспользоваться одним из методов ньютоновского типа, использующего разностную аппроксимацию Якобиана. В качестве таковой, авторами с успехом была использована аппроксимация Стеффенсона, задающая так называемый самоускоряющийся метод с суб-квадратичной скоростью сходимости.

Итак, мы изучаем стационарную самосогласованную задачу магнитной изоляции при пространственно-зарядовом ограничении через асимптотику системы Власова-Максвелла (ВМ). Данный подход был предложен Langmuir и Compton [2], и развит в работе Degond, Raviart [3], [9], Abdallah, Degond, Mehats [1] для анализа пространственно-зарядового слоя в вакуумном диоде. В безразмерных переменных в системе ВМ появляется малый параметр, как отношение скоростей частицы на катоде и аноде. Соответствующий анализ возмущенной сингулярной задачи дает математическое обоснование результатов Langmuir и Compton [2] в том, что ток протекающий в диоде не может превышать своего предельного значения, называемого током Чайлд-Ленгмюра. Эффект магнитной изоляции заключается в том, что под влиянием сильного внешнего магнитного поля электроны, испускаемые с катода, не достигают анода, а начинают поворачиваться обратно к катоду. При этом возникает электронный слой, вне которого электромагнитное поле равно нулю. Здесь возможны два основных режима: первый, когда электроны достигают анода – «неизолирующий» диод и второй, когда электроны поворачивают обратно к катоду – «изолирующий» диод. В дополнение существует промежуточный режим, когда отдельные электроны могут достигать анода, а другие - нет. Тем не менее, основная система, описывающая режим неизолирующего диода задается следующими уравнениями, которые мы называем предельной задачей:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = j_x \frac{1+\varphi(x)}{((1+\varphi(x))^2 - 1 - a^2(x))^{\frac{1}{2}}}; \tag{1}$$

$$\frac{d^2a}{dx^2}(x) = j_x \frac{a(x)}{((1+\varphi(x))^2 - 1 - a^2(x))^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

с соответствующими начальными и граничными условиями на $x = [0,1]$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \varphi_L \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0, \tag{4}$$

$$a(0) = 0, \quad a(1) = a_L \ . \tag{5}$$

Здесь φ – электростатический потенциал, определяемый разницей напряжений, приложенных к катоду и аноду; a – магнитный потенциал; j_x– плотность тока, не зависит от x. Параметр β характеризует собственное магнитное поле возле катода. Очевидно, что внешнее магнитное поле a_L и приложенное напряжение φ_L определяют собственные параметры диода (j_x, β).

Так как величина, возникающая в подкоренном выражении, имеет важный физический смысл и будет постоянно использоваться нами далее, дадим следующее

Определение 1. Назовем функцию

$$\theta(x) = (1 + \varphi(x))^2 \ - 1 - a^2(x)$$

эффективным потенциалом диода (ЭфП).

Легко убедиться, что электроны не могут вылететь из катода, если к диоду не приложен неотрицательный потенциал. Поэтому всюду будем полагать $\theta'(0) \geq 0$. Предельный режим, когда $\theta'(0) = 0$ называют режимом Чайлда-Лэнгмура. По аналогии с исходной постановкой задачи положим θ_L равным значению эффективного потенциала (ЭП) θ на аноде

$$\theta_{L=} \ (1 + \ \varphi_L \ )^2 - 1 - \ a_L^2 \, ,$$

задающее краевое значение для уравнения по θ. При $\theta_L < 0$ электроны не могут достичь анода $x = 1$, отражаясь магнитным полем назад к катоду. Диод в таком состоянии называют магнитно-изолирующим (МИ-диод).

Следует отметить, что исходным предположением при конструировании этой модели являлась неотрицательность ЭфП. На самом деле θ может зануляться в некоторых точках диода, что приводит к появлению замкнутых траекторий (частицы в "ловушке").

Итак, наша основная цель состоит в изучении нелинейной двухточечной задачи (1)-(5). Очевидно, что согласно физическому смыслу рассматриваться будут только неотрицательные решения системы (1), (2), иными словами $\varphi \geq 0, a \ \geq 0$ на интервале определения $[0,1]$. Сама формулировка задачи подчеркивает явную их зависимость от параметра j_x.

Схему изложения материала в данной статье мы приводим ниже. Статья композиционно состоит из двух частей. Теоретическая – начиная с раздела «существование верхних и нижних решений» до раздела «квазиламинарная модель» и численная – далее. В разделе «постановка задачи» рассматривается релятивистская система ВМ (6)-(8). Вводя малый параметр $\epsilon > 0$ и специальные безразмерные переменные в систему, мы приходим к сингулярно возмущенной задаче.

В последующих разделах поднимаются вопросы численного моделирования, анализа и аппроксимации интегральных кривых. Численные решения, полученные в ходе моделирования, полностью согласованы с приводимыми в начале работы оценками авторов на нижнее и верхнее решения. Кроме того, они являются гладкими непрерывными функциями, обладающими определенными асимптотическими свойствами при приведении диода в почти магнитно-изолированное состояние. Моделирование диода в данных условиях показало принципиальное совпадение характера поведения модели с известными физическими явлениями, характерными для реальных вакуумных диодов. В связи с тем, что решения системы обладают достаточной гладкостью, авторами было уделено особое внимание построению численно-аналитических аппроксимаций решений. Данное исследование позволяет сделать некоторые выводы о типе зависимости параметров модели от известных краевых условий. Авторами не ставилась задача определения конкретных наилучших численных методов, или построения комбинированных многоэтапных алгоритмов, так как в оригинальном виде решение предельной задачи лишь доставляет начальную оценку параметров для полной системы для уравнений в частных производных.

Постановка задачи. Рассмотрим плоский диод, состоящий из двух идеально проводящих электродов: катода $(X = 0)$ и анода $(X = L)$ в виде двух бесконечных пластин, параллельных (Y, Z). Электроны с зарядом $-e$ и массой m испускаются с катода и ускоряются внешним электромагнитным полем

$$E_{\text{ВН}} = E_{\text{ВН}}\, X, \qquad B_{\text{ВН}} = B_{\text{ВН}}\, Z\,.$$

Таким, что $E_{\text{ВН}} \leq 0$, $B_{\text{ВН}} \geq 0$. Будем предполагать, что электронная функция распределения F не зависит от Y и течение является стационарным и без столкновений. Тогда система описывается так называемой релятивистской моделью Власова-Максвелла размерности 1.5

$$V_X\, \frac{\partial F}{\partial X} + e\left(\frac{d\Phi}{dX} - V_Y\, \frac{dA}{dX}\right)\frac{\partial F}{\partial P_X} + e\, V_X\, \frac{dA}{dX}\, \frac{\partial F}{\partial P_Y} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\,X^2} = \frac{e}{\epsilon_0} N(X), \quad X \in (0, L), \tag{7}$$

$$\frac{d^2 A}{dX^2} = -\,\mu_0\, J_Y\,(X), \quad X \in (0, L) \tag{8}$$

со следующими граничными условиями

$$F(0, P_X, P_Y\,) = G(P_X, P_Y), \quad P_X > 0, \tag{9}$$

$$F(L, P_X, P_Y) = 0, \quad P_X < 0, \tag{10}$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi(L) = \Phi_L = -LE_{\text{ВН}}\,, \tag{11}$$

$$A(0) = 0, \quad A(L) = A_L = LB_{\text{ВН}}\,, \tag{12}$$

где формулы (9), (10) описывают профиль инжекции, соответственно, на катоде и аноде, $E = -d\Phi/dX$, $B = -dA/dX$. Соотношение между релятивистким импульсом и скоростью задается в виде

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{P}) = \frac{P}{\gamma m}, \qquad \gamma = (1 + \frac{|\boldsymbol{P}|^2}{m^2 c^2})^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$V = (V_X, V_Y), \quad P = (P_X, P_Y), \quad |P|^2 = P_X^2 + P_Y^2,$$

или

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{P}) = \nabla_{\boldsymbol{P}}\, E(P),$$

где E – релятивистская кинетическая энергия, с – скорость света.

В системе (6)-(8) макроскопические характеристики: плотность частицы N; X и Y – компоненты плотности тока J_X, J_Y описываются следующими формулами

$$N(X) = \int_{R^2} F(X, P_X, P_Y) dP_X dP_Y, \tag{13}$$

$$J_X = -e\int_{R^2} V_X\,(\boldsymbol{P}) F(X, P_X, P_Y) dP_X dP_Y, \tag{14}$$

$$J_Y(X) = -e\int_{R^2} V_Y\,(\boldsymbol{P}) F(X, P_X, P_Y) dP_X dP_Y. \tag{15}$$

ϵ_0 и μ_0 являются, соответственно, диэлектрической постоянной и проницаемостью вакуума.

Модель (6)-(12) размерности 1.5 описывает два основных режима. При сильном магнитном поле электроны не достигают анода и отклоняются обратно к катоду, при этом J_X компонента плотности тока обращается в нуль и наша модель в этом случае дает полное описание физического процесса в вакуумном диоде. Если внешнее магнитное поле не является достаточно сильным для «изоляции» диода, то J_X не обращается в нуль и наша модель может рассматриваться как приближение к уравнениям Максвелла. По аналогии с (13) – (15) определим моменты, связанные с функцией распределения входящих частиц:

$$N^G = \int_{R_+^2} G(P_X\,, P_Y) dP_X dP_Y, \tag{16}$$

$$J_X^G = -e \int_{R_+^2} V_X(\boldsymbol{P}) G(P_X, P_Y) dP_X dP_Y, \tag{17}$$

$$J_Y^G = -e \int_{R_+^2} V_Y(\boldsymbol{P}) G(P_X, P_Y) dP_X dP_Y, \tag{18}$$

$$T^G = \int_{R_+^2} E(\boldsymbol{P}) G(P_X, P_Y) dP_X dP_Y, \tag{19}$$

где $R_+^2 = \{(P_X, P_Y) \in R^2, P_X > 0\}$, при этом тепловая скорость эммисии $V^G = \sqrt{\frac{T^G}{mN^G}}$. Величины (16)-(19) определяют, соответственно, плотность входящей частицы, X и Y компоненты входящей плотности тока и входящую кинетическую энергию частицы. Для более глубокого понимания процессов, происходящих в диоде, запишем систему (6) – (12) в безразмерных переменных. Следуя Degond, Raviart [3], введем следующие единицы, соответственно, для положения, скорости, импульса, энергии, электростатического потенциала, векторного потенциала, плотности частицы, тока и функции распределения

$$\bar{X} = L, \quad \bar{V} = c, \quad \bar{P} = mc, \quad \bar{E} = mc^2, \qquad \bar{\Phi} = \frac{mc^2}{e},$$

$$\bar{A} = \frac{mc}{e}, \quad \bar{N} = \frac{\epsilon_0 \bar{\Phi}}{xX^2}, \quad \bar{J} = -ec\bar{N}, \quad \bar{F} = \frac{\bar{N}}{P^2}$$

и соответствующие безразмерные переменные

$$x = X/\bar{X}, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{P}}{\bar{P}} = (p_x, p_y), \quad \boldsymbol{v} = (v_x, v_y) = \frac{\boldsymbol{V}}{\bar{V}} = \boldsymbol{p} / (1+\boldsymbol{p}^2)^{1/2},$$

$$\Xi = \frac{E}{\bar{E}} = (1+\bar{p}^2)^{\frac{1}{2}} - 1, \quad \varphi = \Phi/\bar{\Phi}, \quad a = A/\bar{A}, \quad n = N/\bar{N},$$

$$j = J/\bar{J}, \quad f = \frac{F}{\bar{F}}.$$

Пусть диод управляется в режиме Чайлд-Ленгмюра. В этой ситуации величина тепловой скорости V_G намного меньше чем дрейфовая скорость частицы, равная скорости света c. Полагая $\epsilon = \frac{V_G}{c}$, имеем

$$f(0, p_x, p_y) = g^\epsilon(p_x, p_y) = \frac{1}{\epsilon^3} g\left(\frac{p_x}{\epsilon}, \frac{p_y}{\epsilon}\right), \quad p_x > 0,$$

где g – заданный профиль. После преобразований система в безразмерных переменных принимает вид

$$v_x \frac{\partial f^\epsilon}{\partial x} + \left(\frac{d\varphi^\epsilon}{dx} - v_y \frac{da^\epsilon}{dx}\right)\frac{\partial f^\epsilon}{\partial p_x} + v_x \frac{da^\epsilon}{dx}\frac{\partial f^\epsilon}{\partial p_y} = 0 \tag{20}$$

$$(x, p_x, p_y) \in (0,1) \times R^2,$$

$$\frac{d^2\varphi^\epsilon}{dx^2} = n^\epsilon(x), \quad x \in (0,1), \tag{21}$$

$$\frac{d^2 a^\epsilon}{dx^2} = j_y^\epsilon(x), \quad x \in (0,1), \quad n^\epsilon(x) = \int_{R_+^2} f^\epsilon(x, p_x, p_y) dp_x\, dp_y, \tag{22}$$

$$j_y^\epsilon(x) = \int_{R_+^2} v_y f^\epsilon(x, p_x, p_y)\, dp_x dp_y = \tag{23}$$

$$= \int_{R_+^2} \frac{p_y}{(1+|p|^2)^{1/2}} f^\epsilon(x, p_x, p_y)\, dp_x\, dp_y,$$

$$F^\epsilon(0, p_x, p_y) = g^\epsilon(p_x, p_y) = \frac{1}{\epsilon^3} g\left(\frac{p_x}{\epsilon}, \frac{p_y}{\epsilon}\right), \quad p_x > 0, \tag{24}$$

$$\epsilon(1, p_x, p_y) = 0, \quad p_x < 0, \tag{25}$$

$$\varphi^\epsilon(0) = 0, \qquad \varphi^\epsilon(1) = \varphi_L, \tag{26}$$

$$a^\epsilon(0) = 0, \qquad a^\epsilon(1) = a_L. \tag{27}$$

Для вывода предельной модели (1)-(5) при $\epsilon \to 0$ мы рассмотрим различные инварианты задачи. Следующие две величины являются константами движения

$$W^{\epsilon}(x,p) = \Xi(p) - \varphi^{\epsilon}(x) \text{ – энергия системы,} \quad (28)$$

$$P_y^{\epsilon}(x,p) = p_y - a^{\epsilon}(x) \text{ – канонический импульс.} \quad (29)$$

Последнее означает, что на каждой электронной траектории (в фазовом пространстве) $W^{\epsilon}, P_y^{\epsilon}$ являются константами. Обозначим за f, n, a, j, φ предел величин $f^{\epsilon}, n^{\epsilon}, \ldots$ при ϵ, стремящимся к нулю. Так как в пределе $\epsilon = 0$ электроны испускаются с нулевой скоростью, то энергия электрона W и канонический импульс P_y обращаются в нуль. Следовательно,

$$p_y(x) = a(x), \quad (p_x(x))^2 = (1 + \varphi(x))^2 - 1 - (a(x))^2$$

и выполняются следующие тождества

$$v_x(x) = \frac{p_x(x)}{(1 + p^2(x))^{1/2}} = \frac{p_x(x)}{1 + \varphi(x)},$$

$$v_y(x) = \frac{v_y(x)}{(1 + p^2(x))^{1/2}} = \frac{a(x)}{1 + \varphi(x)}.$$

Выражая данные тождества в терминах эффективного потенциала, имеем, что для того, чтобы электроны инжектировались в диод, необходимо, чтобы θ был неотрицательным вблизи катода. Поэтому всегда $\theta'(0) \geq 0.$ Предельный случай $\theta'(0) = 0$ является режимом Чайлд-Ленгмюра (пространственно-зарядовое ограничение). В силу (29) и Определения 1, это условие эквивалентно стандартному условию Чайлд-Ленгмюра

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0. \quad (30)$$

Если значение потенциала θ на аноде $\theta_L < 0,$ то электроны не могут достичь анода $x = 1$; они отражаются магнитными силами обратно к катоду и диод называется «магнитно изолирующим». Это позволяет определить нам магнитное поле Холла, которое является релятивистской версией критического поля в нерелятивистском случае:

$$a_L^H = (\varphi_L^2 + 2\varphi_L)^{1/2}.$$

Диод является магнитно изолирующим, если $a_L > a_L^H$ и неизолирующим, если $a_L < a_L^H.$ В безразмерных переменных магнитное поле Холла задается формулой

$$B^H = \frac{1}{Le} (\Phi_L^2 + \frac{2mc^2}{c} \Phi_L)^{1/2}.$$

2. Слабые магнитные поля $\boldsymbol{B_{ext}} < \boldsymbol{B^H}$. В безразмерных переменных эффективный потенциал $\theta_L = (1 + \varphi_L)^2 - 1 - a_L^2$ является положительным. Из этого следует, что потенциал принимает большее значение на аноде, чем на катоде, $\theta(1) - \theta(0) = \theta_L > 0$ и все электроны, ускоряемые электромагнитным полем, достигают анода. Мы предполагаем, что

$$\forall x \in (0,1], \qquad \theta(x) > 0, \qquad \theta(1) - \theta(0) = \theta_L > 0.$$

Так как нет электронов, исходящих с анода, то ток j_x^- обращается в нуль. Следовательно,

$$j_x = j_x^+ \int_{R_+^2} v_x f(x, p_x, p_y) dp_x dp_y$$

и функция распределения задается в виде монокинетического пучка, испускаемого с катода $x = 0$ с нулевой начальной скоростью

$$f(x,P) = n(x)\delta(p(x) - (\theta(x))^{\frac{1}{2}})\ \delta\left(p_y - a(x)\right).$$

При этом

$$n(x) = \frac{j_x}{\upsilon_x(x)} = j_x \frac{1+\varphi(x)}{(\ \theta(x))^{1/2}}, \quad j_y(x) = n(x)\upsilon_y(x) = j_x \frac{a(x)}{(\theta(x))^{1/2}}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения Пуассона и Ампера (21), (22), получим

$$\frac{d^2\,\varphi}{dx^2}(x) = j_x\,\frac{1+\varphi(x)}{((1+\varphi(x))^2-1-a(x)^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \varphi(0)=0, \quad \varphi(1) = \varphi_L.$$

$$\frac{d^2 a}{dx^2}(x) = j_x \frac{a(x)}{((1+\varphi(x))^2-1-a(x)^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad a(0)=0, \quad a(1)=a_L. \tag{I}$$

В системе (I) неизвестными являются электростатический потенциал φ, магнитный потенциал a и ток j_x, который не зависит от x.

Рассмотрим задачу Коши для системы (I) с условиями

$$\varphi(0)=0, \quad a(0)=0, \quad \varphi'(0)=0, \quad a'(0)=\beta. \tag{31}$$

Введем новые переменные η и γ посредством формул

$$\eta(x) = (\theta(x))^{\frac{1}{2}} = ((1+\varphi(x))^2-1-a^2(x))^{\frac{1}{2}},$$

и

$$1+\varphi(x) = (\eta^2(x)+1)^{\frac{1}{2}}\cosh\big(\gamma(x)\big).$$

$$a(x) = (\eta^2(x)+1)^{\frac{1}{2}}\sinh\big(\gamma(x)\big).$$

Записывая систему (I) в переменных η и γ мы разбиваем ее на два уравнения

$$(\eta')^2 = \frac{2j_x}{\eta}\left(\eta^2 - \frac{\beta^2}{2j_x}\eta + 1\right), \tag{32}$$

$$\gamma'(x) = \frac{\beta}{\eta^2(x)+1}. \tag{33}$$

Вначале решим (32) разделением переменных. С этой целью, рассмотрим два случая зависящие от того, что правая часть этого уравнения (полином второй степени) может, как обращаться в ноль, так и нет. Пусть $\tilde{\beta} = \frac{\beta}{(j_x)^{1/2}}$ и определим следующие функции:

$$\Lambda_a(\tilde{\beta},\eta) = \int_0^\eta \frac{\tilde{\beta}(w)^{\frac{1}{2}}}{(2(w^2-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}w+1))^{\frac{1}{2}}(w^2+1)}\,dw, \tag{34}$$

$$\Gamma_a = \int_0^\eta \frac{\tilde{\beta}(w)^{\frac{1}{2}}}{(2(w^2-\frac{\tilde{\beta}^2}{2}w+1))^{\frac{1}{2}}}\,dw. \tag{35}$$

Функции (34), (35) определены при $\tilde{\beta} \le 2$ для всех $\eta \ge 0$. Если $\tilde{\beta} \ge 2$, то они определены только на интервале $\eta \in [0,\eta_m]$, где

$$\eta_m(\tilde{\beta}) = \frac{\tilde{\beta}^2-(\beta^4-16)^{\frac{1}{2}}}{4}. \tag{36}$$

В этом случае имеют место следующие формулы

$$\Lambda_m(\tilde{\beta}) = \Lambda_a\left(\tilde{\beta},\eta_m(\tilde{\beta})\right), \qquad \Gamma_m\left(\tilde{\beta},\eta_m(\tilde{\beta})\right), \tag{37}$$

$$\Lambda_b(\tilde{\beta},\eta) = 2\Lambda_m(\tilde{\beta}) - \Lambda_a(\tilde{\beta},\eta), \ \Gamma_b(\tilde{\beta},\eta) = 2\Gamma_m(\tilde{\beta}) - \Gamma_a(\tilde{\beta},\eta), \tag{38}$$

и решение задачи Коши для задачи (I), (31) может быть записано неявно через вышеопределенные функции:

– Если $\tilde{\beta} \le 2$, то решение $\eta(x), \gamma(x)$ на $[0, +\infty)$ определяется формулами

$$\beta x = \Gamma_a\left(\tilde{\beta}, \eta(x)\right), \quad \gamma(x) = \Lambda_a\left(\tilde{\beta}, \eta(x)\right);$$

– Если $\tilde{\beta} \ge 2$, то решение $\eta(x), \gamma(x)$ определено только на интервале $[0, 2x_m]$ с $x_m = \frac{\Gamma_m(\tilde{\beta})}{\beta}$ и неявно задается посредством формул

$$\text{при } 0 \le x \le x_m, \quad \beta x = \Gamma_a\left(\tilde{\beta}, \eta(x)\right), \quad \gamma(x) = \Lambda_a\left(\tilde{\beta}, \eta(x)\right),$$

$$\text{при } x_m \le x \le 2x_m, \quad \beta x = \Gamma_b\left(\tilde{\beta}, \eta(x)\right), \quad \gamma(x) = \Lambda_b\left(\tilde{\beta}, \eta(x)\right).$$

Заметим, что функция η симметрична по x_m и достигает своего максимума $\eta(x_m) = \eta_m(\tilde{\beta})$ в этой точке.

3. Магнитно-изолирующий диод $B_{ext} > B^H$. Так как в этом случае $\theta < 0$, то эффективный потенциал является отталкивающим. Электроны, исходящие с катода с нулевой начальной скоростью не могут достичь анода. Они отклоняются обратно к катоду в некоторой (неизвестной заранее) точке x^* диода так, что

$$\forall x \in [0, x^*] \quad \theta(x) \ge 0 \quad \text{и} \quad n(x) > 0\,,$$

$$\forall x \in (x^*, 1] \quad \theta(x) < 0 \quad \text{и} \quad f\left(x, p_x, p_y\right) = 0. \tag{39}$$

Заметим, что уравнения на электростатический и магнитный потенциалы зависят от расположения точек, в которых эффективный потенциал θ обращается в ноль. В данном подразделе мы рассмотрим два важных частных случая: квазиламинарную модель, где θ обращается в ноль только на границах электронного слоя и ламинарную модель, в которой потенциал θ равен нулю вдоль всего электронного слоя $[0, x_m]$. В квазиламинарном случае электроны покидают катод, достигают точки x^* и затем отклоняются к катоду. В ламинарном случае они движутся параллельно оси Y и их скоростью υ_x вдоль x пренебрегают. Нетрудно показать, что имеет место следующее условие

$$\theta'(x^*) = 0. \tag{40}$$

Положим $\beta = a'(0)$ и воспользуемся переменными η, γ, определяемыми формулами (35), (36) на интервале $[0, x^*]$. Обозначим за γ^*, a^* значения функций в точке x^* (свободная граница). Из (38), (40) мы имеем на $[0, x^*]$

$$1 + \varphi^* = \cosh\gamma^*, \quad a^* = \sinh\gamma^*, \quad (\varphi')^* = \beta\sinh\gamma^*, \quad (a')^* = \beta\cosh\gamma^*.$$

С другой стороны, потенциалы φ, a являются аффинными функциями вне интервала $[0, x^*]$. Следовательно,

$$(\varphi')^* = \frac{\varphi_L - \varphi^*}{1 - x^*}; \qquad (a')^* = \frac{a_L - a^*}{1 - x^*}$$

и

$$(1 - x^*)\beta\sinh\gamma^* = 1 + \varphi_L - \cosh\gamma^*;$$

$$(1 - x^*)\beta\cosh\gamma^* = a_L - \sinh\gamma^*. \tag{41}$$

Делением первого уравнения на второе получим

$$(1 + \varphi_L)\cosh\gamma^* - a_L\sinh\gamma^* = 1. \tag{42}$$

Уравнение (42) в обозначениях $\exp(\gamma^*)$ имеет два решения. Условие $0 \le \varphi^* \le \varphi_L$ позволяет выделить единственное решение

$$\gamma^* = \mathrm{Log}\,\frac{1+\varphi_L+a_L}{1+(-\theta_L)^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{43}$$

Подставляя формулу (43) в (41) получим важное соотношение между свободной границей x^*, значением эффективного потенциала на аноде θ_L и током j_x

$$\beta(1-x^*) = (-\theta_L)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Клазиламинарная модель. В этом случае эффективный потенциал является положительным в интервале $(0, x^*)$. Из фазового портрета следует, что токи j_x^+ и j_x^- на двух ветвях характеристической кривой (C_+) и (C_-) являются постоянными и противоположно направленными. Введем обозначение $\bar{J} = 2j_x^+ = -2j_x^-$. Тогда функция распределения имеет следующий вид

$$f(x, p_x, p_y) = \frac{n(x)}{2}\,\delta(p_x - (\theta(x))^{\frac{1}{2}})\delta(p_y - a(x))$$

и

$$n(x) = \frac{\bar{J}(1+\varphi)}{(\theta(x))^{1/2}}\,, \qquad j_y = \frac{\bar{J}a(x)}{(\theta(x))^{1/2}}\,.$$

Следовательно**,** квазиламинарная модель описывается системой нелинейных уравнений:
на интервале $(0, x^*)$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \bar{J}\,\frac{1+\varphi(x)}{((1+\varphi(x))^2-1-(a(x))^2}\,, \qquad \forall x \in (0, x^*) \tag{44}$$

$$\frac{d^2a}{dx^2}(x) = \bar{J}\,\frac{a(x)}{((1+\varphi(x))^2-1-(a(x))^2}\,, \qquad \forall x \in (0, x^*) \tag{45}$$

на интервале $(x^*, 1)$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = \frac{d^2a}{dx^2}(x) = 0, \qquad \forall x \in (x^*, 1), \tag{46}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \varphi_L, \quad a(0) = 0, \quad a(1) = a_L \tag{47}$$

с условием, что функции φ, a и их первые производные являются непрерывными в точке x^*. Система (44) – (47) представляют собой задачу со свободной границей с неизвестными $\varphi, a, \bar{J}$ и x^*. Внутри электронного слоя $(0, x^*)$ система (44)-(45) является идентичной системе (I) для случая неизолирующего диода.

5. Существование верхних и нижних решений. Отметим еще раз, что система (1), (2) является сингулярной в нуле при $\varphi = 0$, и мы не можем говорить о свойствах монотонности правых частей на интервале $\varphi \in [0, \infty)$ и, следовательно, об условии Липшица. Задача (1)-(5) не обладает свойством квазимонотонности в конусе. Таким образом, стандартный метод нижних и верхних решений для систем полулинейных эллиптических уравнений в полуупорядочном банаховом пространстве для данной задачи не работает Amann [4]. Несмотря на это, мы покажем существование нижних и верхних решений задачи (1)-(5) без условий локальной липшецевой непрерывности и квазимонотонности, используя достаточно простую технику.

Введем определение конуса в банаховом пространстве X.

Определение 2. Пусть X есть банахово пространство. Непустое, выпуклое, замкнутое множество $P \subset X$ называется конусом, если он удовлетворяет условиям:
$x \in P, \lambda \geq 0$ влечет $\lambda x \in P$;
$x \in P, -x \in P$ влечет $x = O$, где O означает нулевой элемент X.
Здесь $\leq$ есть порядок в X, индуцируемый P, т.е. $x \leq y$, если и только если $y - x$ есть элемент P.
Будем обозначать $[x, y]$ замкнутый упорядоченный интервал между x и y, т.е.

$$[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}. \tag{48}$$

Мы также предполагаем, что конус P нормальный в X, т.е. упорядоченные интегралы ограничены по норме.

Введем норму $|U|_X = |u|_{C^1} + |v|_{C^1}$ и норму $|U|_X = |u|_\infty + |v|_\infty$, соответственно, в X

$$X \equiv \{(u, v): u, v \in C^1(\overline{\Omega}), u = v = 0\}$$

и в C, где $U = (u, v)$. Здесь конус P задается посредством

$$P = \{(u, v) \in X: u \geq 0, v \geq 0 \text{ для всех } x \in \Omega\}. \quad (49)$$

При этом если $u \neq 0, v \neq 0$ принадлежат P, то $-u, -v$ не принадлежат. Мы будем работать здесь с классическими пространствами на интервалах $\bar{I} = [a, b]$, $\hat{I} =]a, b]$, $I = (a, b)$:

$C(\bar{I})$ с нормой $\|u\|_\infty = \max\{|u(x)|: x \in \bar{I}\}$;

$C^1(\bar{I}) = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$;

$C_{loc}(I)$, содержащие все функции, которые являются локально абсолютно непрерывными в I. Мы вводим пространство $C_{loc}(I)$, так как задача (1)-(5) является сингулярной при $\varphi = 0$. Порядок $\leq$ в конусе P понимается в слабом смысле, т.е. y – возрастающая, если $a \leq b$ влечет $y(a) \leq y(b)$ и y – убывающая, если $a \leq b$ влечет $y(a) \geq y(b)$.

Теорема 1. Пусть $y \in C(\bar{I}) \cap C_{loc}(I)$. Функция f определена на $I \times R$. Пусть $f(x, y)$ – возрастающая по y функция, тогда

$$v'' - f(x, v) \geq w'' - f(x, w) \quad \text{почти всюду на } I, \quad (50)$$

$$v(a) \leq w(a), \quad v(b) \leq w(b)$$

влечет

$$v \leq w \text{ на } \bar{I}.$$

Для более удобного определения соотношения порядка в конусе P сделаем преобразование задачи (1)-(5). Пусть $F(\varphi, a)$ и $G(\varphi, a)$ определены в (51). Тогда заменой $\varphi = -u$ задача сводится к виду

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = j_x \frac{1 - u}{((1 - u)^2 - 1 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = F(j_x, u, a), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = \varphi_L,$$

$$\frac{d^2a}{dx^2} = j_x \frac{a}{((1-u)^2 - 1 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = G(j_x, u, a), \quad a(0) = 0, \quad a(1) = a_L. \quad (51)$$

Заметим, что все решения задачи (1)-(5), так же как и задачи (51), симметричны по отношению замены знака у магнитного потенциала a: $(\varphi, a) = (\varphi, -a)$ или тоже самое $(u, a) = (u, -a)$. Таким образом, мы должны отыскивать только положительные решения $\varphi > 0, a > 0$ в конусе P или только отрицательные: $\varphi < 0, a < 0$. В силу симметрии задачи это равносильно и не приносит расширения типов знакоопределенных решений задачи (1)-(2) (соотв. (51)). Еще раз отметим, что введение отрицательного электростатического потенциала в задаче (51) связано с более удобным соотношением между порядком в конусе и положительностью функции Грина для оператора $-u''$, что используется далее.

Определение 3. Пара $[(\varphi_0, a_0), (\varphi^0, a^0)]$ называется sub-super (нижним-верхним) решением задачи (1)-(5) по отношению к P, если выполнены следующие условия

$$(\varphi_0, a_0) \in C_{loc}(I) \cap C(\bar{I}) \times C_{loc}(I) \cap C(\bar{I})(\varphi^0, a^0) \cap C_{loc}(I) \cap C(\bar{I}) \times C_{loc}(I) \cap C(\bar{I}): \quad (52)$$

$$\varphi_0'' - j_x \frac{1 + \varphi_0}{((1+\varphi_0)^2 - 1 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = F(\varphi_0, a) \leq 0 \text{ в } I, \quad (53)$$

$$(\varphi^0)'' - j_x \frac{1 + \varphi^0}{((1 + \varphi^0)^2 - 1 - a^2)^{\frac{1}{2}}} = F(\varphi^0, a) \geq 0 \text{ в } I, \quad (54)$$

$$\forall a \in [a_0, a^0];$$

$$a_0'' - j_x \frac{a_0}{((1+\varphi)^2-1-a_0^2)^{\frac{1}{2}}} = G(\varphi, a_0) \le 0 \text{ в } I, \tag{55}$$

$$(a^0)'' - j_x \frac{a^0}{((1+\varphi)^2-1-(a^0)^2)^{\frac{1}{2}}} = G(\varphi, a^0) \ge 0 \text{ в } I,$$

$$\forall\varphi \in [\varphi_0, \varphi^0]; \tag{56}$$

$$\varphi_0 \le \varphi^0, \quad a_0 \le a^0 \text{ в } I; \tag{57}$$

и на границе

$$\varphi_0(0) \le 0 \le \varphi^0(0), \quad \varphi_0(1) \le \varphi_L \le \varphi^0(1),$$
$$a_0(0) \le 0 \le a^0, \quad a_0(1) \le a_L \le a^0(1); \tag{58}$$

Sub-sub (нижним-нижним) решением задачи (51) по отношению к P, если выполнено условие (52) и

$$\varphi_0'' - F(j_x, \varphi_0, a_0) \le 0 \text{ в } I$$
$$a_0'' - G(j_x, \varphi_0, a_0) \ge 0 \text{ в } I \tag{59}$$

и на границе

$$\varphi_0(0) \le 0, \quad \varphi_0(1) \le \varphi_L,$$
$$a_0(0) \le 0, \quad a_0(1) \le a_L. \tag{60}$$

Замечание 1. В определении 3 выражения с квадратными корнями берутся по модулю $|(1+\varphi)^2 - 1 - a^2|$.

По аналогии с (39), (40) мы можем ввести определение super-super (верхнее-верхнее) решения в конусе.

Определение 4. Функции $\Phi(x, x_{a_i}, j_x)$, $\Phi\left(x, x_{\varphi_j}, j_x\right)$ будем называть полутривиальными решениями задачи (1), (2), если $\Phi(x, x_{a_i}, j_x)$ решение скалярной краевой задачи

$$\varphi'' = F(j_x, \varphi, x_{a_i}) = j_x \frac{1+\varphi}{((1+\varphi)^2-1-(x_{a_i})^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{61}$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = \varphi_L,$$

а $\Phi_1(x, x_{\varphi_j}, j_x)$ – решение скалярной краевой задачи

$$a'' = G\left(j_x, x_{\varphi_j}, a\right) = j_x \frac{a}{((1+x_{\varphi_j})^2-1-a^2)^{\frac{1}{2}}}, \tag{62}$$

$$a(0) = 0, \quad a(1) = a_L.$$

Здесь x_{a_i}, $i = 1, 2, 3$ и x_{φ_j}, $j = 1, 2$ являются, соответственно, «индикаторами» полутривиальных решений $\Phi(x, x_{a_i}, j_x)$, $\Phi_1(x, x_{\varphi_j}, j_x)$, определяемыми следующим путем:

$x_{a_1} = 0$, если $a(x) = 0$;

$x_{a_2} = a^0$, если $a = a^0$ верхнее решение задачи (62);

$x_{a_3} = a_0$, если $a = a_0$ нижнее решение задачи (62);

$x_{\varphi_1} = \varphi^0$, если $\varphi = \varphi^0$ верхнее решение задачи (61);

$x_{\varphi_2} = \varphi_0$, если $\varphi = \varphi_0$ нижнее решение задачи (61).

Из определения 4 получаем следующие типы скалярных краевых задач для полутривиальных решений (1)-(2) (соотв. 51):

$$\varphi'' = F(\varphi, 0) = j_x \frac{1+\varphi}{((1+\varphi)^2-1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (A_1)$$

$$\varphi(0) = 0, \; \varphi(1) = \varphi_L.$$

$$\varphi'' = F(\varphi, a^0) = j_x \frac{1+\varphi}{((1+\varphi)^2-1-(a^0)^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (A_2)$$

$$\varphi(0) = 0, \; \varphi(1) = \varphi_L.$$

$$\varphi'' = F(\varphi, a_0) = j_x \frac{1+\varphi}{((1+\varphi)^2-1-(a_0)^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (A_3)$$

$$\varphi(0) = 0, \; \varphi(1) = \varphi_L.$$

$$a'' = G(\varphi^0, a) = j_x \frac{a}{((1+\varphi^0)^2-1-a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (A_4)$$

$$a(0) = 0, \; a(1) = a_L.$$

$$a'' = G(\varphi_0, a) = j_x \frac{a}{((1+\varphi_0)^2-1-a^2}, \quad (A_5)$$

$$a(0) = 0, \; a(1) = a_L.$$

Будем отыскивать решения задач (A_1)-(A_1) с условием

$$\varphi_0 < \varphi^0,$$

где $\varphi_0(x_{a_1}), \varphi^0(x_{a_2})$, соответственно, нижнее и верхнее решения задачи (A_1). При этом решение (φ, a) задачи (51) должно принадлежать интервалу

$$\varphi \in \Phi(\varphi, 0) \cap \Phi(\varphi, a^0) \cap \Phi(\varphi, a_0),$$

$$a \in \Phi_1(\varphi^0, a) \cap \Phi_1(\varphi_0, a).$$

Более того, выполняется следующее упорядочение нижнего и верхнего решений задач (A_1)-(A_3)

$$\varphi_0(x_{a_1}) < \varphi_0(x_{a_2}) < \varphi_0(x_{a_3}) < \varphi^0(x_{a_2}) < \varphi^0(x_{a_1}).$$

Решение задач (A_4)-(A_5) будем искать с условием

$$a_0 < a^0,$$

при этом выполняется следующее упорядочение нижнего и верхнего решений задач (A_4)-(A_5)

$$a_0(x_{\varphi_1}) < a_0(x_{\varphi_2}) < a^0(x_{\varphi_2}) < a^0(x_{\varphi_1}).$$

Теперь непосредственно перейдем к изучению задачи (61), которая включает случаи (A_1)-(A_3). Рассмотрим краевую задачу (61) с

$$F(x, \varphi)\colon\; (0,1] \times (0, \infty) \to (0, \infty). \quad (B_1)$$

В условии (B_1) для $F(x, \varphi)$ мы опустили индекс a_i, рассматривая общий случай зависимости F от x. Будем предпологать, что F есть функция Каратеодори, т.е.

$$F(\cdot, s) \text{ измерима для всех } s \in R, \quad (B_2)$$

$$F(x, \cdot) \text{ непрерывна почти везде для } x \in]0, 1], \quad (B_3)$$

и выполнены следующие условия

$$\int_0^1 s(1-s) F ds < \infty. \quad (B_4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} > 0, \text{ т.е. } F \text{ – возрастающая по } \varphi. \quad (B_5)$$

Существует $\gamma(x) \in L^1(]0,1])$ и $\alpha \in R, 0 < \alpha < 1$ такие, что

$$|F(x,s)| \le \gamma(x)(1 + |s|^{-\alpha}), \quad \forall (x,s) \in]0,1] \times R. \tag{B$_6$}$$

Нас интересует положительное классическое решение уравнения (61), т.е. $\varphi > 0$ в P при $x \in]0,1]$ и $\varphi \in C([0,1]) \cap C^2(]0,1])$. Задача (61) – сингулярная, поэтому условие (B_1) не выполняется на всем интервале $\varphi \in (0,\infty)$, и в связи с этим, известные теоремы Amann [4] о существовании нижнего и верхнего решения в конусе P здесь не работают. Из теоремы 1 следует, что так как в (61) F возрастающая по φ, то $\varphi < w$ для $x \in]0,1]$, где φ и w удовлетворяют дифференциальному неравенству (50).

Теорема 2. Пусть выполнены условия $(B_2) - (B_6)$, тогда существует положительное решение $\varphi \in C([0,1]) \cap C^2\,(]0,1])$ краевой задачи (61).

Доказательство. Пусть $\varphi > 0$ – решение задачи (61). В силу теоремы 1 $\varphi < w$ для $x \in]0,1]$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим уравнение

$$\varphi_\varepsilon'' = j_x \frac{1+\varphi_\varepsilon+\varepsilon}{((1+\varphi_\varepsilon+\varepsilon)^2 - 1 - (x_{a_i})^2)^{\frac{1}{2}}} = \tag{63}$$

$$F_\varepsilon(j_x, \varphi_\varepsilon + \varepsilon, x_{a_i}), \quad \varphi_\varepsilon(0) = 0, \quad \varphi_\varepsilon(1) = \varphi_L.$$

Пусть w и φ, соответственно, верхнее и нижнее решение уравнения (63) (ниже, в утверждении 1 показано, что действительно такие решения существуют). Следовательно, теорема о монотонных итерациях Heikkila [5] дает существование классического решения φ_ε уравнения (63), которое удовлетворяет $w > \varphi_\varepsilon > \varphi$ для $x \in]0,1]$ и является ограниченным в C. При этом $F_\varepsilon(j_x, \varphi_\varepsilon + \varepsilon, x_{a_i})$ – ограниченная и существует равномерный предел $\lim_\varepsilon \to \varphi_\varepsilon = \varphi$. Из последнего следует, что если $0 < \eta < \frac{1}{2}$, тогда $\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(j_x, \varphi_\varepsilon + \varepsilon, x_{a_i}) = F(j_x, \varphi, x_{a_i})$ равномерно на $[\eta, 1-\eta]$ и $\varphi > 0$ при $x \in [\eta, 1-\eta]$. Так как φ_ε сходится равномерно на $[0,1]$, то это влечет существование $lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon'(\eta)$. Таким образом, существует $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_\varepsilon''(x)$ на компактных подмножествах (0, 1) и $\{\varphi_\varepsilon'\}$ равномерно сходится на (0, 1) к дифференцируемой функции φ' на $[\eta, 1-\eta]$. Из последнего следует, что φ – дважды дифференцируемая на $[\eta, 1-\eta]$, $\varphi'' = F\,(j_x, \varphi, x_{a_i})$, $x \in [\eta, 1-\eta]$ и $u \in C([0,1]) \cap C^2(]0,1])$ – положительное решение задачи (61).

Замечание 2. Деликатным моментом в доказательстве теоремы 2 является нахождение нижнего φ и верхнего w для возмущенной задачи (63). В качестве нижнего решения можно взять решение уравнения (A_1) (полутривиальное решение φ), тогда верхним решением будет, например, максимальное решение уравнения (A_1). Применение монотонно-итерационной техники к уравнению (63) дает существование максимального решения $\overline{\varphi}(x, j_x)$ такого, что

$$\varphi(x, x_j) \le \overline{\varphi}(x, x_j) < w(x) \quad \text{для } x \in]0,1]. \tag{64}$$

Утверждение 1. Пусть $0 < c \le j_x \le j_x^{\max}$. Тогда уравнение (A_1)

$$\varphi'' = F(j_x, \varphi, 0) = j_x \frac{1+\varphi}{(\varphi(2+\varphi))^{1/2}},$$

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi(1) = \varphi_L$$

имеет нижнее положительное решение

$$u_0 = \delta^2 x^{\frac{4}{3}}, \tag{65}$$

если

$$4\delta^3 \ge 9 j_x^{\max}\,(1+\delta^2)/(2+\delta^2)^{1/2} \tag{66}$$

и верхнее положительное решение

$$u^0 = \alpha + \beta x \quad (\alpha, \beta > 0), \tag{67}$$

при этом

$$\varphi_L \geq \delta^2, \qquad (68)$$

где δ определяется из (66).

Замечание 3. В случае отрицательных решений квадратный корень берется как $(|\varphi|(2+\varphi)|)^{\frac{1}{2}}$. Здесь $u^0 = -\varepsilon x$ есть верхнее решение, а $u_0 = -2+\varepsilon -$ нижнее решение $(0<\varepsilon<1)$. Следовательно, уравнение (A_1) имеет отрицательное решение при $0<\varphi_L< -2$, так как $F(x,-2) = -\infty$.

Из (66), (68) следует, что величина тока ограничена значением электростатического потенциала на аноде φ_L

$$j_x \leq j_x^{\max} \leq F(\varphi_L). \qquad (69)$$

Анализ нижнего и верхнего решений (65), (67) показывает, что при $\delta^2 = \varphi_L > 2$ и $\alpha = \beta \leq 1$ интервал по x между нижним и верхним решениями уменьшается, а при больших значениях потенциала φ_L диод выходит на режим $\varphi_L x^{4/3}$.

Утверждение 2. Пусть $0 < c \leq j_x \leq j_x^{\max}$. Тогда уравнение (A_4)

$$a'' = G(j_x, \varphi^0, a) = j_x \frac{a}{((1+\varphi^0)^2 - 1 - a^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$a(0) = 0, \;\; a(1) = a_L$$

с нижним решением $a^0 = 0$ и верхним решением $a^0 = u^0 > 0$, условиями (66), (68) имеет единственное решение $a(x, j_x, c)$, которое является единственным и строго убывающим по c, так как правая часть дифференциального уравнения убывающая по a. Наименьшее неотрицательное решение есть $f(x, j_x, 0) = 0$, и при $0 \leq a_L \leq (\varphi_L^0(2+\varphi_L^0))^{\frac{1}{2}}$ существует только одно решение, и нет положительных решений для других значений a_L.

Замечание 4. Задача (A_5) рассматривается по аналогии с задачей (A_4) заменой верхнего решения $a^0 = u^0$ на нижнее $a^0 = u_0$ и $0 \leq a_L \leq (\varphi_{0L}(2+\varphi_{0L}))^{\frac{1}{2}}$.

Следуя определению 3 и утверждениям 1, 2, решения задач (61), (62) можно записать в следующем виде:

lower-lower (нижнее-нижнее) (φ_0, a_0):

$\varphi_0 = u_0 = \delta^2 x^{\frac{4}{3}}, \;\; a_0 = 0, \quad \varphi_L \geq \delta^2;$

upper-lower (верхнее – нижнее) (φ^0, a_0):

$\varphi^0 = u^0 = \alpha + \beta x, \;\; a_0 = 0, \;\; \delta^2 \leq \varphi_L \leq C, \;\; C = \max\{\alpha, \beta\};$

lower-upper (нижнее - верхнее) (φ_0, a^0):

$$\varphi_0 = u_0 = \delta^2 x^{4/3}, \;\; a^0 = u^0, \;\; \varphi_L \geq \delta^2, \;\; a_L \leq ((u_0(2+u_0))^{\frac{1}{2}};$$

upper-upper (верхнее – верхнее) (φ^0, a^0):

$$\varphi^0 = a^0 = \alpha + \beta x, \;\; a^0 = u^0, \;\; \varphi_L \leq C, \;\; a_L \leq a^0 \leq u^0.$$

6. Существование решений системы (1)-(5). Для получения названных результатов модифицируем теорему существования нижних и верхних решений McKenna, Walter [6] для произвольных эллиптических систем вида

$$\Delta u + f(x,u) = 0 \;\text{ в }\; \Omega, \quad u = 0 \;\text{ на }\; \partial\Omega,$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ векторы размерности n; $\Omega -$ открытое ограниченное подмножество из R^m с гладкой границей $\partial\Omega$, при этом $f(x,u)$ равномерно непрерывна по Гельдеру (с показателем α) по x и липшецева непрерывна по u. В предыдущем разделе мы доказали существование полутривиальных решений системы (1)-(5) (или (51)). Здесь мы покажем существование решений полной системы (1)-(5), основываясь на следующей теореме McKenna-Walter [6].

Теорема 3. Пусть выполнены условия $(B_1)-(B_6)$. Предположим, что существует упорядоченная пара $(\underline{u},\bar{u})$ – нижнее и верхнее решения, т.е.

$$\underline{u},\bar{u}\in C_{loc}((0,1])^2\cap C\big([0,1]\big)^2,\ \ \underline{u}\le\bar{u}\ \text{ в }\ ]0,1]$$

$$\underline{u}(0)\le 0\le\bar{u}(0),\ \ \underline{u}(1)\le u_L\le\bar{u}(1);\ \ u_L=(\varphi_L,a_L),$$

$$\forall x\in]0,1]:\ \ \forall z\in R^2,$$

$$\underline{u}(x)\le z\le\bar{u}(x),\quad z_k=\underline{u}_k(x);$$

$$-\underline{u}_k''(x)\ge h_k(x,z) \tag{70}$$

и

$$\forall x\in]0,1]:\ \ \forall z\in R^2,$$

$$\underline{u}(x)\le z\le\bar{u}(x),\ \ \ z_k=\bar{u}_k(x):$$

$$-\bar{u}_k''(x)\le h_k(x,z) \tag{71}$$

для всех $k\in\{1,2\}$. Тогда существует решение

$$u\in((0,1])^2\cap C([0,1])^2$$

задачи

$$-u''=h\big(\cdot,u(\cdot)\big)\ \text{ на }\ ]0,1]$$

$$u(0)=0,\ \ \ u(1)=u_{L.}$$

Для сохранения упорядоченности нижних и верхних решений в определении 3 запишем дифференциальные неравенства (70), (71) в следующем виде

$$\forall z\in[v(x),w(x)],\ \ \ z_1=w_1(x):$$

$$\pm w_1''(x)\le(\ge)\pm F_1(w_1(x),z_2)$$

$$\forall z\in[v(x),w(x)],\ \ z_1=v_1(x):$$

$$\pm v_1''(x)\ge(\le)\pm F_1(v_1(x),z_2)$$

$$\forall z\in[v(x),w(x)],\ \ z_2=w_2(x)$$

$$\pm w_2''(x)\le(\ge)\pm F_2(z_1,w_2)$$

$$\forall z\in[v(x),w(x)],\ \ z_2=v_2(x)$$

$$\pm v_2''(x)\ge(\le)\pm F_2(z_1,v_2).$$

Замечание 5. Замена знаков с $(+)$ на $(-)$ в дифференциальных неравенствах связана с согласованием знаков и соответственно упорядоченности $(\le)$ нижних (верхних) решений системы (51) в определении 3 и нижних (верхних) решений в теореме 3.

Из последних соотношений получаем

$$w''(x)=\ F_1(w_1(x),0)\le F_1(w_1,z_2)$$

$$\tag{72}$$

$$v_1''(x)\ge sup_{z_2}F_1(v_1(x),z_2)$$

$$w_2''(x)\le F_2(z_1,w_2)$$

$$\tag{73}$$

$$v_2''(x)\ge sup_{z_1}F_2(z_1,v_2)$$

Из последнего неравенства получаем с учетом (69) и $\theta_L>0$ оценку на величину магнитного поля на аноде

$$a_L\le\frac{j_x}{2}\le\frac{j_x^{max}}{2}\le\frac{F(\varphi_L)}{2}\ . \tag{74}$$

При выполнении оценки (74) диод работает в «неизолирующем» режиме, при этом величина a_L ограничена значением электростатического потенциала на аноде φ_L с критическим значением $\varphi_L = 2$. При возрастании магнитного потенциала a_L диод переходит в «изолирующий» режим, что приводит к более сложной задаче со свободной границей.

Итак, имеет место следующий основной результат:

Пусть выполнены условия (B_2), (B_3), (B_6) и неравенства (74). Тогда задача (1)-(5) имеет положительное решение в конусе P такое, что

$$\varphi_0'' \geq j_x F(\varphi_0, z_2), \quad z_2 \in [0, \varphi^0]$$
$$(\varphi^0)'' \leq j_x F(\varphi^0, z_2), \quad z_2 \in [0, \varphi^0]$$
$$a_0'' \geq G(j_x, z_1, a_0), \quad z_1 \in [\varphi_0, \varphi^0]$$
$$(a^0)'' \leq G(j_x, z_1, a^0), \quad z_1 \in [\varphi_0, \varphi^0]$$

где $\varphi_0 = \delta^2 x^{4/3} -$ нижнее решение задачи (A_1), $\varphi^0 = \alpha + \beta x \ (\alpha, \beta > 0) -$ верхнее решение задачи (A_1) с условием $0 \leq a_L \leq (\varphi^0(2 + \varphi^0))^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 4 может быть использована для построения минимальных и максимальных решений задачи (1)-(5) (Heikkila [5]).

7. Численное моделирование задачи. Второй вопрос в изучении системы (1)-(5) связан с ее численными решениями. Для этого система заменяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_1'(t) = y_2(t),$$
$$y_2'(t) = j_x \frac{1 + y_1(t)}{((1 + y_1(t))^2 - 1 - y_3^2(t))^{\frac{1}{2}}}, \tag{75}$$

$y_1(0) = 0, \ y_2(0) = 0,$

$$y_3'(t) = y_4(t),$$
$$y_4'(t) = j_x \frac{y_3(t)}{((1 + y_1(t))^2 - 1 - y_3^2(t))^{\frac{1}{2}}}, \tag{76}$$

$y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = \beta$

с краевыми условиями

$$y_1 = \varphi_L, \quad y_3(1) = a_L. \tag{77}$$

Заметим, что хоть сколько-нибудь полного моделирования предельного случая как системы ОДУ (1) – (5) или (75) – (77) на настоящий момент не имеется. Такое положение дел сложилось в частности потому, что данная задача описывается автономной системой ОДУ второго порядка, имеющей разрыв в начальной точке. К дополнительным затруднениям является крайняя неустойчивость численного решения в окрестности начальной точки и наличие двух параметров (плотность тока и собственное магнитное поле возле катода), определяющих согласованность с граничными условиями. Для преодоления этих затруднений авторами была проделана работа по выявлению наиболее простых допустимых численных методов и разработке специального метода для нахождения параметров модели по заданным граничным условиям.

Потенциалы φ, a связаны с параметрами j_x, β следующими алгебраическими уравнениями

$$\big(1 + \varphi(x)\big)a'(x) - \varphi'(x)a(x) = \beta, \tag{78}$$

$$2j_x(\theta(x))^{\frac{1}{2}} - (\varphi'(x))^2 + (a'(x))^2 = \beta^2, \tag{79}$$

которые можно использовать с целью проверки согласованности полученных значений j_x, β с краевыми условиями. Вектор (j_x, β) будет рассматриваться далее как параметрический вектор, зависящий от граничных условий задачи (1)-(5). Так как анализ граничных условий на потенциалы φ_L, a_L не всегда эффективен, будем рассматривать $(\theta(x))^{\frac{1}{2}}$ и $(\theta_L)^{\frac{1}{2}}$ как меру расстояния. При определении граничных условий, величины $(\varphi_L,\ a_L)$ или $\left(\varphi_L, \left(\theta_L\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ алгебраически эквивалентны на R^+, поэтому, мы введем множество равноудаленных точек и обозначим их следующим образом $(z, (\theta_L\ )\hat{}(1/2)), z = \varphi_L$.

8. Анализ найденных нижних-верхних решений предельной задачи. До настоящего момента аналитическое решение системы ОДУ (1)-(5) неизвестно. Теорема 4 предыдущего раздела дает нам только нижнее-верхнее решение задачи, которое используется далее для численных расчетов. Согласно этой теореме, траектории решений для потенциалов φ, a ограничены нижним и верхним решениями

$$y_{UP}(x) = kx + b,\ \ k, b > 0, \tag{80}$$

$$y_{LOW}(x) = c^2 x^{\frac{4}{3}}. \tag{81}$$

Используя граничные условия (3)-(5), можно получить достаточно точные оценки на траекторию решения

$$c^2\varphi_L x^{4/3} \le \varphi(x) \le \varphi_L(x), \qquad 0 \le a(x) \le a_L(x)$$

определенные на $x \in [0, 1]$. Рассмотрим приближенную оценку нижнего решения в более общем виде

$$y_{LOW}(x) = y(1)x^{\gamma},\ \ \gamma > 1. \tag{82}$$

Здесь $y(1)$ принимает значения или φ_L или a_L. Значение параметра γ зависит только от φ_L, a_L и может быть найдено численно.

Первая гипотеза нижнего решения. Предположим, что (82) должно быть точным решением для $\varphi(x)$ и $a(x)$. В этом случае, в каждой точке численного решения мы должны иметь

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}(x_i) &= \varphi_L x_i^{\gamma_\varphi}, \\ \hat{a}(x_i) &= a_L x_i^{\gamma_a}. \end{aligned} \tag{83}$$

Здесь $\hat{y}(x)$ означает численное решение ОДУ $y(x)$.
Следовательно

$$\gamma_\varphi = \frac{ln\frac{\widehat{\varphi}(x_i)}{\varphi_L}}{ln\ x_i}, \qquad \gamma_a = \frac{ln\frac{\hat{a}(x_i)}{a_L}}{ln\ x_i} \tag{84}$$

и лучший способ проверить эту гипотезу – оценить среднее значение m и дисперсию σ^2 для каждого набора граничных условий. Интегрируя по 50000 отрезками и отбрасывая данные в начальной и конечных точках, получаем выборку из 49999 элементов. Результаты этого статистического оценивания приведены в таблице 1.

Таблица 1. γ – оцениваемый параметр; 49999 пробные точки.

φ_L	a_L	m_{γ_φ}	$\sigma^2_{\gamma_\varphi}$	m_{γ_a}	$\sigma^2_{\gamma_a}$
1.0	1.0	$m_{\gamma_\varphi}1$	5.285e-4	$m_{\gamma_a}1$	1.327e-3
8.0	3.0	$m_{\gamma_\varphi}2$	3.255e-3	$m_{\gamma_a}2$	1.006e-2
0.3	0.8	$m_{\gamma_\varphi}3$	2.937e-3	$m_{\gamma_a}3$	5.148e-4

$$\mathrm{m}_{\gamma_\varphi}1 = 1.4099739532037706,$$

$$\mathrm{m}_{\gamma_\varphi}2 = 1.5451754873805480,$$

$$m_{\gamma_\varphi}3 = 1.4838493294052769,$$

$$m_{\gamma_a}1 = 1.1059698785688596,$$

$$m_{\gamma_a}2 = 1.3763413139333533,$$

$$m_{\gamma_a}3 = 1.0522660035274544.$$

Как будет показано далее, задача (1)-(2) имеет высокую численную чувствительность, поэтому даже при незначительном уменьшении шага интегрирования можно улучшить оценки для γ. Таким образом получим те же результаты, но уже вычисленные на 75000 отрезках численного интегрирования. Опуская начальные и граничные точки интегрирования, получим 74999 пробных чисел.

Таблица 2. γ – оцениваемый параметр; 74999 пробные точки.

φ_L	a_L	m_{γ_φ}	$\sigma^2_{\gamma_\varphi}$	m_{γ_a}	$\sigma^2_{\gamma_a}$
1.0	1.0	$m_{\gamma_\varphi}1$	5.326e-4	$m_{\gamma_a}1$	1.328e-3
8.0	3.0	$m_{\gamma_\varphi}2$	3.267e-3	$m_{\gamma_a}2$	1.0065e-2
0.3	0.8	$m_{\gamma_\varphi}3$	2.947e-3	$m_{\gamma_a}3$	5.155e-4

$$m_{\gamma_\varphi}1 = 1.4098055071829239,$$

$$m_{\gamma_\varphi}2 = 1.5449948650231333,$$

$$m_{\gamma_\varphi}3 = 1.4836787676313544,$$

$$m_{\gamma_a}1 = 1.1059247093400567,$$

$$m_{\gamma_a}2 = 1.3762442069420176,$$

$$m_{\gamma_a}3 = 1.0522339187018956.$$

Числа, приведенные в таблице 2 близки к числам в таблице 1, так как ошибка численных вычислений в обоих случаях равна $10^{-16} - 10^{-17}$.

Используя гипотезу (82) и подставляя формулы (82) в уравнения (1)-(2) с учетом условий (3)-(5), получим два квадратных уравнения

$$\gamma_\varphi^2 - \gamma_\varphi - \frac{1+\varphi_L}{\varphi_L}\xi_L = 0,$$

$$\gamma_a^2 - \gamma_a - \xi_L = 0,$$

где $\xi_L \equiv \frac{j_x}{(\theta_L)^{\frac{1}{2}}}$. Применяя условие $\gamma > 1$, имеем

$$\gamma_\varphi = \frac{1}{2}\left(1 + \left(1 + 4\xi_L + \frac{1}{\varphi_L}\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

$$\gamma_a = \frac{1}{2}\left(1 + (1 + 4\xi_L)\right). \qquad (82)$$

Откуда немедленно следует $\gamma_\varphi > \gamma_a$, что совпадает с результатами приведенными в таблице 3.

Таблица 3. Гипотеза (82) по оценке параметра γ.

φ_L	a_L	γ_φ	γ_a
1.0	1.0	1.436828731	1.292242432
8.0	3.0	1.658475999	1.644909010
0.3	0.8	1.693216882	1.268396508

Вторая гипотеза о нижнем решении. Сравнивая числа из таблиц 1, 3 мы видим, что нижнее решение (81) проходит ниже траектории реальных решений. И что более важно, поведение нижнего решения $a(x)$ не соответствует начальному условию $\frac{da}{dx}(0) \neq 0$. Следовательно, мы можем предложить, что реальное решение (или по крайней мере его апроксимация) представляется в виде

$$\bar{a}(x) = c_1 x - c_2 x^{\gamma_a}. \tag{86}$$

Применяя условия (3)-(5) к уравнению (86) получим систему уравнений

$$\bar{a}(0) = 0,$$

$$\bar{a}(1) = c_1 + c_2 = a_L,$$

$$\frac{d\bar{a}}{dx}(0) = c_1,$$

$$\frac{d^2\bar{a}}{dx^2}(1) = -c_2\gamma_a(\gamma_a - 1).$$

Используя уравнение (2), имеем

$$c_1 = \frac{da}{dx}(0),$$

$$c_2 = \frac{da}{dx}(0) - a_L, \tag{87}$$

$$\gamma_a^2 - \gamma_a + \frac{a_L}{\frac{da}{dx}(0) - a_L}\xi_L = 0.$$

Вычисляя положительное решение для γ_a, получим

$$\bar{a}(x) = \frac{da}{dx}(0) - \left(\frac{da}{dx}(0) - a_L\right) x^{1/2A}, \tag{88}$$

$$A = 1 + (1 + 4\xi_L \frac{a_L}{\frac{da}{dx}(0) - a_L})^{\frac{1}{2}}.$$

Беря те-же экспериментальные значения, что и выше, имеем

Таблица 4. Гипотеза (86) по оценке параметра.

φ_L	a_L	c_1	c_2	γ_a
1.0	1.0	$c_1 1$	$c_2 1$	$\gamma_a 1$
8.0	3.0	$c_1 2$	$c_2 2$	$\gamma_a 2$
0.3	0.8	$c_1 3$	$c_2 3$	$\gamma_a 3$

$$c_1 1 = 0.879738089874635,$$

$$c_1 2 = 1.72776197665836,$$

$$c_1 3 = 0.759092882499624,$$

$$c_2 1 = -0.120261910125365,$$

$$c_2 2 = -1.27223802334164,$$

$$c_2 3 = -0.040907117500376,$$

$$\gamma_a 1 = 2.341253235040985154,$$

$$\gamma_a 2 = 2.158751926015232973,$$

$$\gamma_a 3 = 3.128246828693846637.$$

Упомянутые ранее функции приводятся ниже. Для проверки предложенной гипотезы статистическими методами, применим те же идеи, что и выше. Задаваясь c_1, c_2, оценим среднее значение и дисперсию для γ_a в (88), чтобы сравнить их с аналитическими значениями, приведенными в таблице 3. Так как соотношение

$$-\frac{\hat{a}(x_i) - c_1 x_i}{c_2}$$

является отрицательным, то в силу вычислительных ошибок численного интегрирования, рассмотрим только допустимые точки.

Таблица 5. Гипотеза (86) по оценке параметра γ.

φ_L	a_L	Valid pts.	γ_a	m_{γ_a}	$\sigma^2_{\gamma_a}$	ε_a	ε_N
1.0	1.0	48744	2.34125	2.36129	2.182e-3	22.54118	22.50162
8.0	3.0	49438	2.15875	2.23132	1.999e-3	245.63749	243.99216
0.3	0.8	47833	3.12825	2.67611	1.126e-2	6.98219	7.21990

В таблице 5 приводятся округленные до малого количества значащих цифр приближения параметра γ_a. Сравнивая четвертую и пятую колонки, видно, что численное приближение (88) проходит выше графика в третьем примере для $\varphi_L = 0.3$, $a_L = 0.8$ и ниже в двух остальных. Тем самым характер поведения должен быть уточнен. Для этого таблица 5 содержит две последних колонки ε_A и ε_N содержащих эвклидову норму вектора ошибки $\hat{a}(x) - \bar{a}(x)$ для разных γ_a: аналитического (см. Таблицу 4) и статистического (см. Таблицу 5), (в реальных вычислениях использовались все значащие цифры). Третья строка показывает, что аналитическое приближение лучше статистического, но порядки ошибок близки для всех трех примеров. Для проверки этой идеи сравним значения

$$\bar{a}'(1) = c_1 \cdot 1 - c_2 \cdot \gamma_a \cdot x^{\gamma_a - 1} = \frac{da}{dx}(0) - \left(\frac{da}{dx}(0) - a_L\right)\gamma_a.$$

Для всех трех численных экспериментов:

Экс.	Гипотеза	Вычисленное
1	1.161301676007854014	1.16218421557717
2	1.474208259896938273	4.51242935767056
3	0.887060443091181776	0.87651519455565

где третья колонка задает вычисленную численно производную $\hat{a}'(1)$. Фактически данные цифры подтверждают состоятельность гипотезы (88).

9. Численные методы.

Формальный анализ предельной задачи. Система ОДУ второго порядка (1), (2)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = j_x \frac{1 + \varphi(x)}{((1 + \varphi(x))^2 - 1 - a^2(x))^{1/2}},$$

$$\frac{d^2 a}{dx^2}(x) = j_x \frac{a(x)}{((1 + \varphi(x))^2 - 1 - a^2(x))^{1/2}}$$

не определяется полностью начальными и граничными условиями (3)-(5)

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi(1) = \varphi_L,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0,$$

$$a(0) = 0, \ a(1) = a_L,$$

так как применение любого численного метода для задачи Коши (1), (2) требует задания следующих начальных значений

$$\varphi(0) = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0,$$

$$a(0) = 0, \quad \frac{da}{dx}(0) = \beta.$$

Последние начальные условия являются неизвестными, так же как и «параметр» – константа j_x. Тем самым пара неизвестных параметров $p = (j_x, \beta)$ определяет различные краевые точки $\varphi(1, j_x, \beta)$ и $a(1, j_x, \beta)$. Фактически, нам следует перейти к поиску корней нелинейной вектор-функции

$$\mathfrak{J}(j_x, \beta) = \begin{pmatrix} \varphi(1, j_x, \beta - \varphi_L \\ a(1, j_x, \beta - a_L \end{pmatrix} = 0. \tag{89}$$

Таким образом, только при совместном изучении уравнений (1) и (5) предельная задача становится полностью определенной. Но при этом, возникает новая задача, так как аналитическое решение системы (1), (2) неизвестно. Поэтому, мы не можем применить какие либо известные методы для решения векторной системы нелинейных уравнений (89). Например, применение метода Ньютона

$$x_{i+1} = x_i - \left[\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial p}\right]^{-1} (x_i)\mathfrak{J}(x_i)$$

требует знание аналитического вида якобиана $J = \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial p}$. С другой стороны, легко убедиться, что система (1), (2) является сингулярной при $x \equiv 0$. Отсюда следует, что все явные численные методы решения ОДУ не применимы в начальной точке. Численные эксперименты также показывают, что уравнения (1), (2) являются сильно чувствительными к значению шага численного интегрирования h. Здесь мы приведем таблицу, содержащую оцениваемые значения $\mathfrak{J}$ для различного шага $h = \frac{1}{n}$ с заданным $p = (j_x, \beta)$. Для численного интегрирования системы (1), (2) мы применили стандартный неявный метод Эйлера второго порядка

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

совместно с стандартным методом Ньютона для решения этого нелинейного уравнения.

Таблица 6. Ошибки численного интегрирования

n	ε_φ	ε_a
1000	1.61425217900765E-0002	-4.47533487147775E-0003
2500	8.34380843012195E-0003	-2.46343215088107E-0003
5000	4.68455678253690E-0003	-1.52983203144597E-0003
10000	2.27729848639435E-0003	-9.16751253617249E-0004
50000	-5.55677931763120E-0004	-1.91669763913965E-0004

Метод Гира и проблема численной чувствительности. Здесь мы приведем только резюме общих результатов из Gear [7] и некоторых последних публикаций. Известно, что классические итеративные методы Гира M- го порядка согласованности записываются в виде

$$Y_{i+1}^{(k+1)} = \sum_{k=1}^{M}(hb_{M-k}f_{i+1-k} - a_{M-k}Y_{i+1-k}) + hb_M f_{i+1}^{(k)}. \tag{90}$$

Здесь $f_{i+1}^{(k+1)} = f\left(x_{i+1,} Y_{i+1}^{(k)}\right)$, верхний индекс k означает номер итерации. Идея состоит в том, чтобы построить некоторые итерационные приближения стартуя с заданных, уже известных точек решения. Как иллюстрацию общей формулы (90) приводим ниже в таблице 7 примеры методов низкого порядка согласованности.

Таблица 7. Итеративные методы Гира $q -$ го порядка согласованности

Порядок q	Формула
1	$Y_{i+1}^{(k+1)} = Y_i + hf(x_{i+1,} Y_{i+1}^{(k)})$
2	$\frac{1}{3}\left(4Y_i - Y_{i-1} + 2hf\left(x_{i+1}, Y_{i+1}^{(k)}\right)\right)$
3	$\frac{1}{11}\left(18Y_i - 9Y_{i-1} + 2Y_{i-2} + 6hf(x_{i+1}, Y_{i+1}^{(k)})\right)$

Сравнивая порядки численных методов для неявного метода Эйлера с данными таблицы 6 для задачи (1), (2) мы видим совпадение порядка согласованности. Для более подробного анализа можно воспользоваться критерием согласованности Гира.

Пусть $\|\cdot\|$ - некоторая матричная норма, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ – функция якобиана. Тогда итерации Гира сходятся, если и только если

$$\left\| hb_M \frac{\partial f}{\partial y} \right\| < 1\,. \tag{91}$$

Постановка преобразованной задачи. Для применения одного из вышеупомянутых численных методов и для изучения свойств их сходимости, преобразуем систему ОДУ второго порядка (1), (2) у системе ОДУ первого порядка

$$\begin{gathered} y_1' = y_2, \\ y_2' = j_x \frac{1+y_1}{((1+y_1)^2-1-y_3^2)^{1/2}}, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = j_x \frac{y_3}{((1+y_1)^2-1-y_3^2)^{\frac{1}{2}}}\,, \\ \bar{y}_0 = \big(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)\big) = (0,0,0,\beta). \end{gathered} \tag{92}$$

Система (92) является автономной системой ОДУ и обладает меньшей вычислительной сложностью. При этом, если можно преодолеть ее «жесткость», то существует специальный набор эффективных неявных численных методов для решения такого типа систем ОДУ. Для этих целей оценим Якобиан системы (92) около сингулярной начальной точки и при $\theta_L \to 0$.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -j_x \frac{1+y_3^2}{[(1+y_1)^2-1-y_3^2]^{\frac{3}{2}}} & 0 & j_x \frac{(1+y_1)y_3}{[(1+y_1)^2-1-y_3^2]^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -j_x \frac{(1+y_1)y_3}{[(1+y_1)^2-1-y_3^2]^{\frac{3}{2}}} & 0 & j_x \frac{(1+y_1)^2-1}{[(1+y_1)^2-1-y_3^2]^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{93}$$

Так как ненулевые элементы могут быть как меньше, так и больше единицы, то мы предпочтем Евклидову матричную норму норме бесконечность

$$\begin{gathered} hb_M = (2 + j_x^2 \frac{B}{K})^{\frac{1}{2}}; \\ B = (1+y_3^2)^2 + 2(1+y_1)^2 y_3^2 + ((1+y_1)^2-1)^2 \quad ; \\ K = [(1+y_1)^2 - 1 - y_3^2]^{\frac{3}{2}} = \\ = hb_M (2 + j_x \frac{G}{K})^{\frac{1}{2}} \;; \\ G = [(1+y_1)^2 + y_3^2]^2 - 2[(1+y_1)^2 - 1 - y_3^2] = \\ = hb_M (2 \left(1 - \frac{j_x^2}{((1+y_1)^2 - 1 - y_3^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + j_x^2 \frac{[(1+y_1)^2 + y_3^2]^2}{[(1+y_1)^2 - 1 - y_3^2]^{\frac{3}{2}}})^{1/2} < 1 \end{gathered}$$

Проверяя последнее условие в начальной точке $(y_1, y_3) = (0,0)$ получим, что выражение под квадратным корнем является неограниченным и формально, метод интегрирования Гира не может сходиться. Данное выражение является большим, если $\theta_L \to 0$. Это объясняет плохие свойства сходимости для численных экспериментов с

$$(\theta_L)^{\frac{1}{2}} < 0.01.$$

Тем не менее, даже выбор очень малого $h > 0$ не панацея, так как при этом резко возрастает «накопительная» ошибка. В оригинальной постановке Гир использовал методы для решения осциллирующих задач, где положительные и отрицательные ошибки частично компенсируют друг друга. Мы же работаем с гладкими выпуклыми функциями, что способствует накоплению ошибок.

10. Построение дифференциальной модели на эффективный потенциал. Отметим, что параметры j_x, β системы (1)-(5) определяются краевыми условиями φ_L, a_L. Поскольку аналитическое решение задачи (1)-(2) на данный момент неизвестно, характер этих зависимостей так же неопределен. В предыдущих разделах мы предложили достаточно эффективный итеративный алгоритм, привязанный к решаемой системе уравнений второго порядка. Его главным недостатком является использование β как части начальных условий. Тем самым любая численная ошибка в его вычислении вносит дополнительную ошибку в результаты численного решения ОДУ. Особую проблему это составляет в окрестности нуля – в области наибольшей численной неустойчивости. Таким образом мы заинтересованы в построении на R^+ алгебраически эквивалентной системы в которой β не является параметром в начальных условиях. Продифференцируем $\theta(x)$.

$$\theta'(x) = 2\left[\left(1+\varphi(x)\right)\varphi'(x) - a(x)a'(x)\right],$$

$$\theta^{(2)}(x) = 2\left[\left(1+\varphi(x)\right)\varphi^{(2)}(x) - a(x)a^{(2)}(x) + (\varphi'(x))^2 - (a'(x))^2\right]. \tag{94}$$

Подставляя (1), (2) в (94) получим

$$2\left[\left(j_x\frac{(1+\varphi(x))^2}{(\theta(x))^{\frac{1}{2}}} - j_x\frac{a^2(x)}{(\theta(x))^{\frac{1}{2}}} - j_x\frac{1}{(\theta(x))^{\frac{1}{2}}}\right) + j_x\frac{1}{(\theta(x))^{1/2}} + (\varphi'(x))^2 - (a'(x))^2\right] =$$

$$= 2\left[j_x\frac{\theta(x)}{(\theta(x))^{1/2}} + j_x\frac{1}{(\theta(x))^{1/2}} + 2j_x(\theta(x))^{\frac{1}{2}} - \beta^2\right] =$$

$$2\left[j_x\frac{3\theta(x)+1}{(\theta))^{1/2}} - \beta^2\right].$$

Соответствующие начальные и краевые условия вычисляются непосредственно из определения (94):

$$\theta(0) = 0,\ \ \theta'(0) = 0,\ \ \theta(1) = \theta_L. \tag{95}$$

Приведенное выше дифференциальное уравнение второго порядка может быть преобразовано к ОДУ первого порядка. Для этого умножим обе части уравнения на $\theta'(x)$ и объединяя их с $\theta(x)$ с учетом начальных условий (95) приходим к уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\theta'(x))^2 = 6j_x\theta'(x))^{\frac{1}{2}} + 2j_x\frac{\theta'(x)}{(\theta(x))^{\frac{1}{2}}} - 2\beta^2\theta'(x);$$

$$\frac{d}{dx}(\theta'(x))^2 = \frac{12\cdot 2}{3}\,j_x\frac{d}{dx}\theta^{\frac{3}{2}}(x) - 4\beta^2\frac{d}{dx}\theta(x) + 8j_x\frac{d}{dx}\theta^{\frac{1}{2}}(x);$$

$$(\theta'(x))^2 = 8j_x\theta^{\frac{3}{2}}(x) - 4\beta^2\theta(x) + 8j_x(\theta(x))^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, мы можем представить задачу на ЭФП двумя различными ОДУ с начальными условиями (95)

$$\theta^{(2)}(x) = 2\left[j_x\frac{3\theta(x)+1}{(\theta(x))^{\frac{1}{2}}} - \beta^2\right], \tag{96}$$

$$(\theta'(x))^2 = 8j_x\theta^{\frac{3}{2}}(x) - 4\beta^2\theta(x) + 8j_x(\theta(x))^{\frac{1}{2}}. \tag{97}$$

Отсюда в частности, следует, что уравнение (96) имеет разрыв в начальной точке $x = 0$. Уравнение же (97) является непрерывным, в отличие от первого. Второе из начальных условий на магнитный потенциал $a(x)$ может получено как

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}) = ((1+\ \varphi(\mathrm{x}))^2 - 1 - \theta(\mathrm{x}))^{\frac{1}{2}}.$$

Объединяя одно из уравнений (96), (97) уравнением (1) например, получаем предельную задачу в полной постановке на R^{+}. При этом параметр – начальное условие β входит в ОДУ линейно и аддитивно.

Аддитивное преобразование. В связи с тем, что наибольший интерес, равно как и проблемы с численной устойчивостью имеет случай почти магнитно изолирующего диода когда $\theta_L \ll 1$, особый интерес представляет начальное дифференциальное уравнение второго порядка на ЭфП (96). Исходя из его вида можно использовать замену переменной $\theta(x) = g(x) - \beta^2 x^2$, или

$$\mathrm{g}^{(2)}(\mathrm{x}) = 2\mathrm{j}_\mathrm{x} \frac{3\left(\mathrm{g}(\mathrm{x}) - \beta^2\mathrm{x}^2\right) + 1}{(\mathrm{g}(\mathrm{x}) - \beta^2\mathrm{x}^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{98}$$

с начальным условием $g(0) = 0$. Что касается второго начального условия, то $g'(x) = \theta'(x) + 2\beta^2 x$, следовательно $g'(0) = 0$. Очевидно, что уравнение вида (98) имеет несколько другие численные свойства. В частности, если в результате ошибок вычислений и используемого численного метода имеет место быть $g(x) < \beta^2 x^2$, то счет невозможен.

Аналитическое исследование уравнения на ЭфП. Эллиптические интегралы. Для того, чтобы найти формальное решение задачи Коши для (97), введем формально функцию $Root(\cdot, Z)$ как обозначение всех корней некоторого уравнения от одной переменной Z. При этом с учетом начального условия $\theta(0) = 0$ решение записывается как

$$\theta(\mathrm{x}) = \mathrm{Root}\left(\pm \int_0^{\mathrm{Z}} \frac{\mathrm{dy}}{(8\mathrm{j}_\mathrm{x}\mathrm{y}^{\frac{3}{2}} - 4\beta^2\mathrm{y} + 8\mathrm{j}_\mathrm{x}\mathrm{y}^{\frac{1}{2}} + \mathrm{C}_1)^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{x} = 0, \mathrm{Z}\right). \tag{99}$$

Продифференцировав (99)

$$\theta'(\mathrm{x}) = \mp(8\mathrm{j}_\mathrm{x}\theta^{\frac{3}{2}}(\mathrm{x}) - 4\beta^2\theta(\mathrm{x}) + 8\mathrm{j}_\mathrm{x}\theta^{\frac{1}{2}}(\mathrm{x}) +\ \mathrm{C}_1)^{\frac{1}{2}} \tag{100}$$

и полагая $\theta(0) = 0$, приравняем (100)с вторым начальным условием $\theta'(0) = 0$, откуда $C_1 \equiv 0$. Итак, полагая известным значение вектора параметров (j_x, β) мы можем записать в неявном виде решение уравнения, а именно

$$\theta(\mathrm{x}) = \mathrm{Root}\left(\int_0^{\mathrm{Z}} \frac{\mathrm{dy}}{(8\mathrm{j}_\mathrm{x}\mathrm{y}^{\frac{3}{2}} - 4\beta^2\mathrm{y} + 8\mathrm{j}_\mathrm{x}\mathrm{y}^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} + \mathrm{x} = 0, \mathrm{Z}\right). \tag{101}$$

Интеграл

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{(8\mathrm{j}_\mathrm{x}\mathrm{y}^{\frac{3}{2}} - 4\beta^2\mathrm{y} + 8\mathrm{j}_\mathrm{x}\mathrm{y}^{1/2})^{1/2}}$$

может быть вычислен посредством неполных эллиптических интегралов первого и второго рода, а именно

$$\mathrm{Ell}_1(\mathrm{z}, \mathrm{k}) = \int_0^{\mathrm{z}} \frac{\mathrm{dt}}{(1-\mathrm{t}^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mathrm{k}^2\mathrm{t}^2)^{\frac{1}{2}}}; \tag{102}$$

$$\mathrm{Ell}_2(\mathrm{z}, \mathrm{k}) = \int_0^{\mathrm{z}} (\frac{1-\mathrm{k}^2\mathrm{t}^2}{1-\mathrm{t}^2})^{\frac{1}{2}}\mathrm{dt}\ . \tag{103}$$

Для упрощения выкладок обозначим

$$\mathrm{c}_1 = 8\mathrm{j}_\mathrm{x},\ \ \mathrm{c}_2 = 4\beta^2,$$

$$\mathrm{d} = (\mathrm{c}_2^2 - 4\mathrm{c}_1^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \mathrm{e} = \mathrm{d} - \mathrm{c}_2, \quad \mathrm{f} = \mathrm{d} + \mathrm{c}_2, \tag{104}$$

$$g = \sqrt{\frac{e}{2d}}, \quad \mu = \sqrt{1 + 2\frac{c_1\sqrt{y}}{e}}.$$

В таком случае

$$\int \frac{dy}{\sqrt{c_1 y^{\frac{3}{2}} - c_2 y + c_1 y^{\frac{1}{2}}}} = \tag{105}$$

$$= -\frac{P}{T}[2dEll_2(\mu, g) - 2dEll_1(\mu, g) - c_2 Ell_1(\mu, g)];$$

$$P = -\frac{1}{\sqrt{2}} e\mu(2/d(2c_1\sqrt{y} - f))^{1/2}\sqrt{\frac{c_1\sqrt{y}}{e}};$$

$$T = c_1^2(\sqrt{y}(c_1 - c_2\sqrt{y} + c_1 y))^{1/2} =$$

$$= \frac{\mu g}{c_1^2}(2c_1\frac{2c_1(y)^{\frac{1}{2}} - f}{c_1 - c_2\sqrt{y} + c_1 y})^{\frac{1}{2}}[fEll_1(\mu, g) - 2dEll_2(\mu, g)] =$$

$$= \frac{(\frac{e}{2d})^{1/2}\sqrt{2c_1}}{c_1^2}\sqrt{\frac{4c_1(c_1 - c_2(y)^{\frac{1}{2}} + c_1 y}{e(c_1 - c_2\sqrt{y} + c_1 y)}}[fEll_1(\mu, g) - 2dEll_2(\mu, g)] =$$

$$\frac{2}{c_1\sqrt{d}}[fEll_1(\mu, g) - 2dEll_2(\mu, g)].$$

Подстановка (105) в (101) дает

$$\theta(x) = \mathrm{Root}\left(\frac{2}{c_1\sqrt{d}}[fEll_1(\mu, g) - 2dEll_2(\mu, g)]|_0^Z + x = 0, Z\right).$$

Так как $\mu(0) \equiv 1, g = const$ для заданных (j_x, β), то величина

$$C_0 = \frac{2}{c_1\sqrt{d}}[fEll_1(1, g) - 2dEll_2(1, g)]$$

Является выражением в полных эллиптических интегралах и может быть найдено численно. В конечном счете это дает неявное решение вида

$$\theta(x) = \mathrm{Root}(V + x - C_0 = 0, Z)\,; \tag{106}$$

$$V = \frac{2}{c_1\sqrt{d}}\left[fEll_1\left(\sqrt{1 + 2\frac{c_1(Z)^{1/2}}{e}}, g\right) - 2dEll_2(\sqrt{1 + 2\frac{c_1(Z)^{\frac{1}{2}}}{e}}, g)\right].$$

Уравнение (106) не имеет явного применения, однако определенные аналитические выводы доступны. Прежде всего заметим, что $g \neq 1$ для всех $j_x > 0, \beta \geq 0$ в (106), как это следует из выражений

$$-c_2 \neq \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 \geq 0.$$

Таким образом эллиптический интеграл первого рода невырожден и $\theta(x)$ является непрерывной функцией из C^1. При этом решение (106) имеет более узкую область применения, так как для этого необходимо

$$c_2^2 > 4c_1^2 \leftrightarrow \quad \beta^2 > 4j_x.$$

Отсюда в частности следует, что $e > 0$ и g является чисто комплексным значением. Рассмотрим практическое применение решения вида (101). Разложим в ряд интеграл в решении (101).

$$\int \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{8\mathrm{j_x y^{\frac{3}{2}}} - 4\beta^2 \mathrm{y} + 8\mathrm{j_x y^{\frac{1}{2}}}}} = \int \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{\mathrm{c_1 y^{\frac{3}{2}} - c_2 y + c_1 y^{\frac{1}{2}}}}} = \tag{107}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{c_1}}} \int \frac{\mathrm{dy}}{\sqrt{\mathrm{y^{3/2} - by + y^{1/2}}}} = \left| \mathrm{b} = \frac{\mathrm{c_2}}{\mathrm{c_1}} \geq 0, \mathrm{p} = \sqrt{\mathrm{y}},\ \ \mathrm{dy} = 2\mathrm{pdp} \right| =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\mathrm{c_1}}} \int \frac{\mathrm{pdp}}{\sqrt{\mathrm{p^3 - bp^2 + p}}} = \frac{2}{\sqrt{\mathrm{c_1}}} \int \sqrt{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p^2 - bp + 1}}}\,\mathrm{dp} \approx$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{c_1}}} \left[2\mathrm{y}^{\frac{1}{4}} + \mathrm{by}^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\mathrm{b}^2 - 1\right)\mathrm{y}^{\frac{5}{4}} + \frac{\mathrm{b}}{2}\left(\frac{5}{4}\mathrm{b}^2 - 3\right)\mathrm{y}^{\frac{7}{4}} + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{5}{2}\mathrm{b}^2 + \frac{35}{48}\mathrm{b}^4\right)\mathrm{y}^{\frac{9}{4}} \right].$$

Так как $c_1 > 0$, данный ряд в общем случае может быть записан как

$$\mathrm{S_{Int}(y)} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{\infty} \mathrm{a_i}\,(\mathrm{b})\mathrm{y}^{\frac{2\mathrm{i}+1}{4}} = \mathrm{y}^{\frac{1}{4}} \left[\frac{2}{\sqrt{\mathrm{c_1}}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty} \alpha_{\mathrm{i}}\,(\mathrm{b})\mathrm{y}^{\frac{\mathrm{i}}{2}} \right],$$

Что является полиномом нечетной степени от переменной $\sqrt[4]{y}$. Иначе говоря

$$\theta(\mathrm{x}) = \mathrm{Root}(\mathrm{S_{Int}(Z)} + \mathrm{x} = 0, \mathrm{Z}) \tag{108}$$

имеет по крайней мере одно действительное решение и удовлетворяет начальному условию $\theta(0) = 0$.

Использование обратного преобразования. Рассмотрим замену переменных $\theta(x) = \frac{1}{t^2(x)} - \mu,\ \mu > 0$. Формальный анализ этой замены показывает, что если обозначить $M = sup_{[0,1]}\theta(x)$ для некоторого краевого условия θ_L, то областью значений для $t(x)$ является отрезок $\left[\frac{1}{\sqrt{M+\mu}}, \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right]$. Опуская очевидные преобразования, сразу запишем ОДУ для этой замены

$$\mathrm{t^{(2)}(x)} = 3\frac{[\mathrm{t'(x)}]^2}{\mathrm{t(x)}} - \mathrm{t^2(x)}\left\{3\mathrm{j_x}\sqrt{1 - \mu \mathrm{t^2(x)}} + \mathrm{t^2(x)}\left[\frac{\mathrm{j_x}}{\sqrt{1 - \mu \mathrm{t^2(x)}}} - \beta^2\right]\right\}, \tag{109}$$

$$\mathrm{t(0)} = \frac{1}{\sqrt{\mu}},\quad \mathrm{t'(0)} = 0,\quad \mathrm{t_L} = \frac{1}{\sqrt{\theta_\mathrm{L} + \mu}},\ \ \mu > 0.$$

Исходя из уравнения (109) выбор параметра μ не определен никакими дополнительными ограничениями. Тем не менее, если рассматривать значения элементов Якобиана для неявного метода Эйлера имеем выражение

$$3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + y_1^3\left[\frac{j_x}{(1-\mu y_1^2)^{\frac{3}{2}}} - 4\beta^2 + 3j_x\frac{1-\mu}{\sqrt{1-\mu y_1^2}}\right] + 6j_x y_1\sqrt{1-\mu y_1^2},$$

где $y_1 = t(x), y_2 = t'(x)$. Исходя из этой формулы выбор $\mu \equiv 1$ представляется очевидным, так как это упрощает как уравнение (109), так и увеличивает скорость счета неявным методом Эйлера. Выполняя моделирование тестовой задачи, получим таблицу.

Таблица 7. Обратное преобразование, $\mu = 1$.

$h = \frac{1}{N}$	j_x	β
50000	0.529972707602575	0.941200063472354
$\frac{50000}{75000}$	0.529946335039570	0.941194759937059

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Ben Abdallah, P. Degond, F. M'ehats, Mathematical models of magnetic insulation. Physics of Plasmas, Vol. 5, (1998), pp. 1522-1534.

2. A. Langmuir, K.T. Compton, Electrical discharges in Gases : Part II, Fundamental Phenomena in Electrical Discharges, Rev. Mod. Phys., 3, (1931), pp. 191-257.

3. P. Degond, P.-A. Raviart, On a penalization of the Child-Langmuir emission condition for the one-dimensional Vlasov-Poisson equation, Asymptotic Anal., 6, (1992), pp. 1-27.

4. Amann H. Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. SIAM Review. 1976, V.18, No.4, p.620-709.

5. Heikilla S. On fixed points through a generalized theorem method with applications to differential and integral equations involving discontinuities. Nonl. Anal. TMA. 1990, V.14, No.5, p.413-426.

6. McKenna P.J., Walter W. On the Dirichlet Problem for Elliptic Systems. Applicable Analysis. 1986, V.21, p.207-224.

7. C.W. Gear, Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall, 1971.

Информация об авторах

Синицын Александр Владимирович – профессор, Национальный Университет Колумбии, г. Богота, Колумбия, e-mail: avsinitsyn@yahoo.com

Эдиксон Рохас – профессор, Национальный Университет Колумбии, г. Богота, Колумбия

Authors

Sinitsyn Aleksandr Vladimirovich – Professor, Department of mathematics, Universidad Nacional de Colombia , Bogota, Colombia, e-mail: avsinitsyn@yahoo.com

Edixon Rojas – Professor, Department of mathematics, Universidad Nacional de Colombia , Bogota, Colombia

Для цитирования

Синицын А.В., Рохас Э. Исследование предельной модели плоского вакуумного диода как параметрической сингулярной задачи коши с краевыми условиями // «Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами»: электрон. науч. журн. – 2019. – №4(5). – С. 1-27. DOI: 10.26731/2658-3704.2019.4(5).1-27 – Режим доступа: http://ismm-irgups.ru/toma/45-2019, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ. (дата обращения: 20.11.2019)

For citations

Sinitsyn A.V., Rojas E. Investigation of the limit model of the plane vacuum diode as a parametric singular cauchy problem with boundary conditions // Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal], 2019. No. 4(5). P. 1-27. DOI: 10.26731/2658-3704.2019.4(5).1-27 [Accessed 20/11/19]