

В. В. Михаэлис¹, С. И. Михаэлис¹

¹ *Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИМЕНИМОСТИ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ РЕШЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аннотация. Искусственный интеллект – одна из самых современных информационных технологий, применение которой возможно практически в любой сфере деятельности. Появление и повсеместное внедрение многочисленных технологий искусственного интеллекта (ИИ) требует от пользователя знания и умения по работе с ним. В статье анализируется применение ИИ общеинтеллектуального направления для распознавания и решения сложных математических выражений с использованием сервисов ChatGPT, MathGPTPro и проверкой решения в MathCAD.

Ключевые слова: искусственный интеллект, математические выражения, ChatGPT, MathGPTPro, MathCAD.

V. V. Mikhaelis¹, S. I. Mikhaelis¹

¹ *Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation*

RESEARCH ON THE APPLICABILITY OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE WHEN SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS

Abstract. Artificial intelligence is one of the most modern information technologies, the use of which is possible in almost any field of activity. The emergence and widespread adoption of numerous artificial intelligence (AI) technologies requires the user to have knowledge and skills to work with it. The article analyzes the use of general-intelligence AI for recognizing and solving complex mathematical expressions using ChatGPT, MathGPTPro services and checking solutions in MathCAD.

Keywords: artificial intelligence, mathematical expressions, ChatGPT, MathGPTPro, MathCAD.

Введение. Понятие «искусственный интеллект» (далее – ИИ), появившееся более 50 лет назад, относится к системам автоматического управления, построенных на технологии обработки знаний с позиции эффективного применения при решении задач в условиях неопределенности. Ранее такие задачи решались только человеком. Однако в последнее время, с появлением нейронных сетей, ИИ получил большое развитие. Игра в шахматы, оптическое распознавание символов, лиц, изображений, аналитика в реальном времени, интернет вещей – все эти задачи, которые раньше мог решить только человек, на сегодня не представляют для ИИ больших проблем. К классическим технологиям ИИ относятся системы, основанные на знаниях [1]. Статистические прогнозы говорят о том, что развитие ИИ будет расти с годовой скоростью более 127 % до 2025 г. Консалтинговая фирма Accenture сообщает, что искусственный интеллект может удвоить ежегодные темпы экономического роста к 2035 г., «изменив характер работы и создав новые отношения между человеком и машиной». К тому времени рынок систем ИИ превысит 4,8 млрд долларов [2].

Несмотря на большое разнообразие различных программ, современный ИИ можно условно разделить на три большие группы:

1. Общеинтеллектуального направления.
2. Восприятие речи, особенно в обработке естественного языка, восприятие изображения, имитация зрения.
3. Робототехника.

Применение ИИ при решении математических задач в последние несколько лет расширяется. Есть области высшей математики, в которых ИИ оказывается быстрым, полезным, удобным, а иногда и единственным инструментом. Очень большая роль ИИ при решении классических задач теории чисел. Рациональность ИИ помогает при классификации простых конечных групп, решение приобретает надежность благодаря усилиям по

автоматизации ключевых конструкций. Проблема воспринимаемости и надежности доказательств стала толчком и к построению Воеводским нового фундамента для всей математики [3–5].

Целью данной работы является оценка правильности, полноты и скорости решения математических выражений различными сервисами ИИ общеинтеллектуального и специального направления. Для апробации были выбраны следующие бесплатные системы: ChatGPT, MathGPTPro. Для проверки решения была выбрана система MathCAD 15.

Представленная работа может быть использована для обучения и проведения экспериментов в рамках вузовских дисциплин, связанных с ИИ [6].

Обсуждение и результаты. Один из популярных ИИ общеинтеллектуального направления для онлайн-чатов – ChatGPT (Generative Pre-trained Transformer, чат-бот с генеративным искусственным интеллектом версия 3.5). Это нейронная сеть, способная понимать естественный язык и отвечать на вопросы, как если бы это делал человек [7]. Специализированный ИИ представлен MathGPTPro. MathGPTPro – это бесплатная нейросеть, которая может решать различные задачи из высшей математики. ChatGPT использует специальный синтаксис для ввода математических выражений и формул, а также поддерживает LaTeX для отображения результатов. MathGpt может решать задачи из таких областей, как алгебра, анализ, топология, теория вероятностей и др.

В рамках нашего исследования рассмотрим правильность и скорость решения математических выражений, а также точность распознавания этими сервисами математической записи, символов, знаков арифметических выражений. Все рассматриваемые выражения были набраны в MS Word 2010 стандартными средствами, а затем перенесены в описываемые сервисы ИИ. Для эксперимента были выбраны 9 математических выражений: три предела, сумма, интеграл по замкнутому контуру, неопределенный интеграл, определенный интеграл, система уравнений, нахождение производной (табл.1).

В столбце 2 таблицы приводится решаемое математическое выражение, в столбце 3 – правильный ответ [8]. В столбцах 4-6 показано верно или неверно (знаки «+» и «-») соответственно) решили выражения рассматриваемые программные средства и приведено время решения. В столбце 4 таблицы для примеров №№2–5, 8 приводится результат того, как решил это выражение ChatGPT, и то, что решение является неверным.

Таблица 1

Результаты решения математических выражений

№	Выражение	Ответ	ChatGPT	Math CAD15	MathGPT
1	2	3	4	5	6
1	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\cot x}$	1	+ 58,47 сек.	+ 2 сек.	+ 2 сек.
2	$\int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2+4)}$	$\int \left(-\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{x+2}{x^2+4} \right) dx =$ $= \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2} \ln x^2+4 +$ $+ \arctg \frac{x}{2} + C$	$\ln x+2 - B/(x+2) +$ $(C/2) \ln (x^2+4) +$ $(D/2) \arctan(x/2) +$ $C1 + C2 + C3$	+	+*
3	$\int_{-4}^0 (x^2 + 7x + 12) \cos x dx$	7,86	$(x^2+7x+12)\sin(x)$ $+ (2x+7)\cos(x) -$ $2\sin(x) + C$	+	+
4	$y = x^{\arcsin x}$	$y' = x^{\arcsin x} \left(\frac{\arcsin x}{x} + \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$	$x^{\arcsin x} * \ln(x) *$ $\cos(\arcsin x)$	+	-
			1 мин. 54,10 сек.	2 сек.	7 сек.

5	Найти производную y'_x $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2) \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2} \end{cases}$	$y'_x = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{2t}$	$y'(x) = (1 / (x * \sqrt{1 - x^2})) * x^{\arcsin(x)}$	+	-
			1 мин. 39,92 сек.	7 сек.	3 сек.
6	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{10n - 3}{10n - 1} \right)^{5n}$	$\frac{1}{e}$	-	+	-
			2 мин. 18 сек.	2 сек.	2 сек.
7	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6 - n)^2 - (6 + n)^2}{(6 + n)^2 - (1 - n)^2}$	$-\frac{12}{7}$	+	+	+
			1 мин. 10,5 сек.	4 сек.	6 сек.
8	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \sin(n\varphi), \varphi \in R, \\ 0 < a < 1$	$\frac{a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}$	$\sin(\varphi)/(1-a)$, где $\varphi \in R$ и $0 < a < 1$	+	+
			43,91 сек.	4 сек.	7 сек.
9	$\oint_{ z =1} \frac{dz}{z}$	$2\pi i$	+	+	+
			1 мин. 8,6 сек.	9 сек.	12 сек.

*Ответ в MathGPT частично правильный, добавлены постоянные величины, которые не описаны в ответе.

Далее покажем, как сервисы GPT, MathGPTPro и MathCAD отобразили результаты решения выражений №1 и 5 с верным и неверным ответами.

Пример №1. Выражение №1. Найти значение предела $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\cot x}$.

1) Ответ GPT-OPEN:

«Чтобы вычислить этот предел, мы можем использовать алгебраические преобразования и свойства тригонометрии. Начнем с преобразования тангенса: $\text{tg}(x) = \sin(x) / \cos(x)$ $\text{ctg}(x) = \cos(x) / \sin(x)$ Теперь заменим x на $\pi/4$: $\text{tg}(\pi/4) = \sin(\pi/4) / \cos(\pi/4) = 1/1 = 1$ $\text{ctg}(\pi/4) = \cos(\pi/4) / \sin(\pi/4) = 1/1 = 1$ Теперь подставим эти значения обратно в исходное выражение: $\lim_{x \rightarrow \pi/4} ((\text{tg} x)^{\text{ctg} x}) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} ((1^1)) = \lim_{x \rightarrow \pi/4} (1) = 1$ Таким образом, предел данной последовательности равен 1 при x , стремящемся к $\pi/4$ ».

Время решения: 58 сек. 47 мс.

2) Ответ MathGPTPro показан на рис. 1.

Время решения: 2 сек.

To find the limit of the given expression as x approaches $\frac{\pi}{4}$, we can use the properties of limits and trigonometric identities.

We know that $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$ and $\text{ctg } x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

So, the given expression becomes:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

Now, we can simplify this expression using the properties of exponents and trigonometric identities.

As x approaches $\frac{\pi}{4}$, both $\sin x$ and $\cos x$ approach $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

So, the limit becomes:

$$\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1^1 = 1$$

Therefore, the limit of the given expression as x approaches $\frac{\pi}{4}$ is 1.

Рис. 1. Решение выражения №1 с использованием MathGPTPro

3) Ответ Mathcad 15:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan(x)^{\frac{1}{\tan(x)}} \rightarrow 1$$

Пример № 2. Выражение №5. Найти производную y'_x

$$\begin{cases} x = \ln(1 - t^2) \\ y = \arcsin\sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

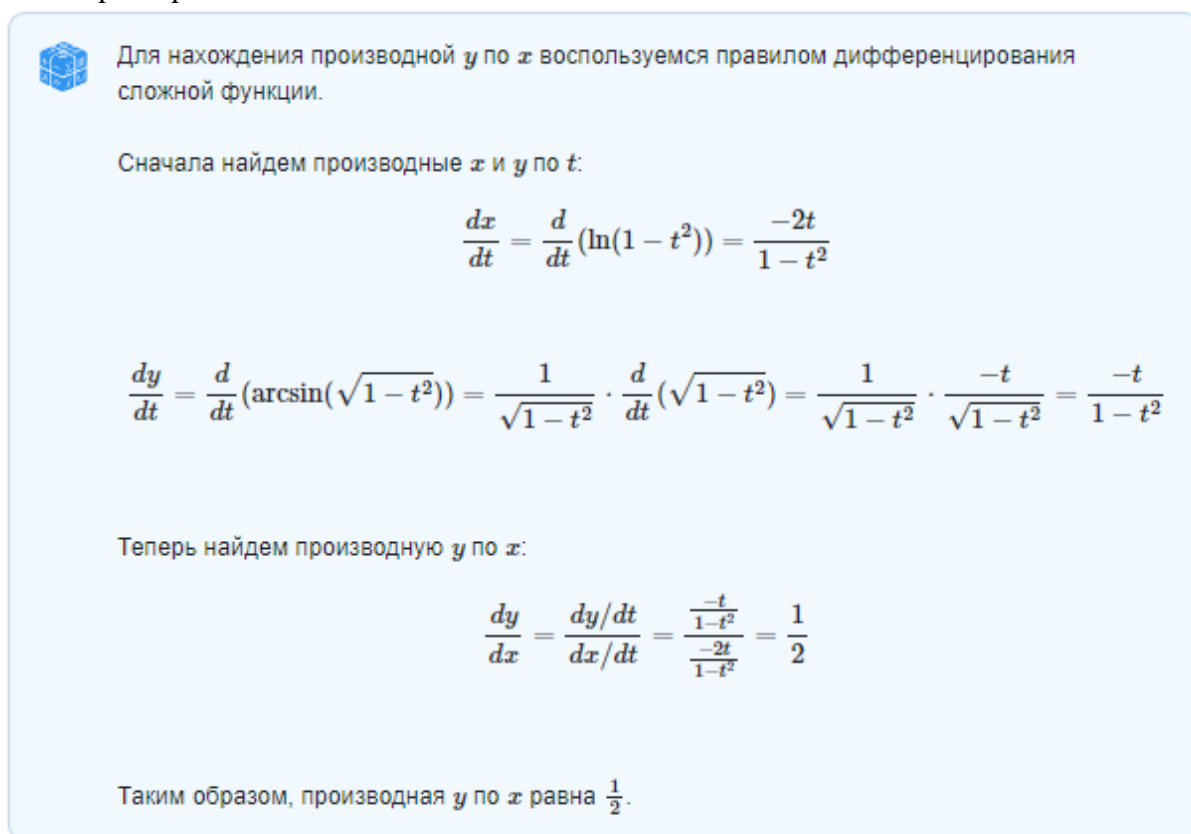
1) Ответ GPT-OPEN:

«Для нахождения производной $y'(x)$ нам нужно воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции. Для функции $y = x^{\arcsin(x)}$ мы можем записать её в виде $y = e^{\arcsin(x) \cdot \ln(x)}$. Теперь мы можем применить правило дифференцирования сложной функции: $y'(x) = (d/dx) [e^{\arcsin(x) \cdot \ln(x)}]$ Для нахождения производной этой функции, нам понадобится применить правило производной сложной функции и правило производной экспоненты. $y'(x) = e^{\arcsin(x) \cdot \ln(x)} \cdot (d/dx) [\arcsin(x) \cdot \ln(x)]$ Теперь мы можем вычислить производные от $\arcsin(x)$ и $\ln(x)$: $(d/dx) [\arcsin(x)] = 1 / \sqrt{1 - x^2}$ $(d/dx) [\ln(x)] = 1 / x$ Подставляем эти значения обратно: $y'(x) = e^{\arcsin(x) \cdot \ln(x)} \cdot (1 / \sqrt{1 - x^2}) \cdot (1 / x)$ Таким образом, производная функции $y = x^{\arcsin(x)}$ равна: $y'(x) = (1 / (x \cdot \sqrt{1 - x^2})) \cdot x^{\arcsin(x)}$ ».

Неверно. Время решения: 1 мин. 39 сек. 92 мс.

2) Ответ MathGPTPro показан на рис. 2.

Время решения: 3 сек.



Для нахождения производной y по x воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции.

Сначала найдем производные x и y по t :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln(1 - t^2)) = \frac{-2t}{1 - t^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\arcsin(\sqrt{1 - t^2})) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot \frac{d}{dt}(\sqrt{1 - t^2}) = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} \cdot \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{-t}{1 - t^2}$$

Теперь найдем производную y по x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{-t}{1 - t^2}}{\frac{-2t}{1 - t^2}} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, производная y по x равна $\frac{1}{2}$.

Рис. 2. Решение выражения №5 с использованием MathGPTPro

3) Ответ Mathcad 15:

$$\frac{y1(t)}{x1(t)} \rightarrow \frac{\sqrt{1 - t^2}}{2 \cdot \sqrt{t^2}}$$

Таким образом, результаты решения выражений оказались следующими:

1. ChatGPT: 3 правильно решенных, 6 неправильно. Полнота решения приемлемая (в среднем более 184 слов описания решения). Скорость решения средняя 95,98 сек.

2. MathGPTPro 6 правильно решенных, 3 неправильно. Полнота решения приемлемая (в среднем более 85 слов описания решения). Скорость решения средняя 5,33 сек.
3. MathCAD 15 все ответы правильны. Решение отсутствует. Скорость решения средняя 3,89 сек.

Выводы исследования: два сервиса ИИ – ChatGPT и MathGPTPro – показали неудовлетворительный результат. Хотя MathGPTPro решил правильно в два раза больше выражений, чем ChatGPT, для специализированного сервиса явно недостаточно 67 % точности. При анализе ответов видно, что программы правильно распознавали выражения. Наличие пояснения ответов – большой «плюс» для сервиса. Однако при отображении результата решения видны непонятные знаки, что, возможно, связано с их отсутствием в алфавите ИИ. Опыт показал, что в данный момент полностью полагаться на решение сложных математических задач средствами ИИ не следует.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аршинский Л. В., Лебедев В. С. Объективизация баз знаний интеллектуальных систем на основе индуктивного вывода с использованием нестрогих вероятностей // Информационные и математические технологии в науке и управлении. 2022. № 4(28). С. 190–200.
2. Accenture: Искусственный интеллект ускорит ежегодные темпы экономического роста к 2035 году. URL: <https://incruussia.ru/news/accenture-iskusstvennyy-intellekt-uskorit-ezhegodnye-tempy-ekonomicheskogo-rosta-k-2035-godu/> (дата обращения: 01.12.2023).
3. Вавилов Н. А. Компьютер как новая реальность математики. I. Personal account / Н. А. Вавилов // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. С. 5–26.
4. Михаэлис В. В. Применение некоторых критериев при выборе оптимальной стратегии в теории игр // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. 2016. № 15. С. 89–95.
5. Vladimir Voevodsky. An experimental library of formalized Mathematics based on the univalent foundations // Mathematical Structures in Computer Science. Cambridge University Press. 2015. Т. 25. Р. 1278–1294.
6. Аршинский Л. В., Жукова М. С. Особенности преподавания курса «Искусственный интеллект в вузе» // Проблемы учебного процесса в инновационных школах : Сборник научных трудов / Под редакцией О. В. Кузьмина. Выпуск 27. Иркутск : Иркутский государственный университет, 2022. С. 31–36.
7. Онлайн чат с искусственным интеллектом GPT в России. URL: <https://gpt-open.ru/chat-gpt-v-rossii/gpt-open> (дата обращения: 01.12.2023).
8. Бесплатные решения к сборнику заданий Кузнецова Л. А. URL: <https://kvadromir.com/kuznecov.html> (дата обращения: 28.03.2024).

REFERENCES

1. Arshinskij L. V., Lebedev V. S. *Ob`ektivizaciya baz znaniy intellektual`ny`x sistem na osnove induktivnogo vy`voda s ispol`zovaniem nestrogix veroyatnostej* [Objectification of knowledge bases of intelligent systems based on inductive inference using non-strict probabilities]. *Informacionny`e i matematicheskie texnologii v nauke i upravlenii* [Information and mathematical technologies in science and management]. 2022, no. 4(28), pp.190–200.
2. *Accenture: Iskusstvenny`j intellekt uskorit ezhegodny`e tempy` e`konomicheskogo rosta k 2035 godu* [Accenture: Artificial intelligence will accelerate annual economic growth by 2035]. URL: <https://incruussia.ru/news/accenture-iskusstvennyy-intellekt-uskorit-ezhegodnye-tempy-ekonomicheskogo-rosta-k-2035-godu/> (accessed: 28.03.2024).
3. Vavilov N. A. *Komp`yuter kak novaya real`nost` matematiki. I. Personal account* [Vavilov N. A. Computer as a new reality of mathematics. I. Personal account]. *Komp`yuterny`e instrumenty` v obrazovanii* [Computer tools in education]. 2020, no. 2, pp. 5–26.

4. Mixaelis V. V. *Primenenie nekotory`x kriteriev pri vy`bore optimal`noj strategii v teorii igr* [Application of some criteria when choosing the optimal strategy in game theory]. *Informacionny`e texnologii i problemy` matematicheskogo modelirovaniya slozhny`x system* [Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems]. 2016, no. 15, pp. 89–95.

5. Vladimir Voevodsky. An experimental library of formalized Mathematics based on the univalent foundations. *Mathematical Structures in Computer Science*. Cambridge University Press. 2015. Vol. 25, pp. 1278–1294.

6. Arshinskij L. V., Zhukova M. S. *Osobennosti prepodavaniya kursa «Iskusstvenny`j intellekt v vuze»* [Features of teaching the course «Artificial intelligence in higher education»]. *Problemy` uchebnogo processa v innovacionny`x shkolax : Sbornik nauchny`x trudov* [Problems of the educational process in innovative schools : A collection of scientific papers]. Vol. 27. Irkutsk, 2022, pp. 31–36.

7. *Onlajn chat s iskusstvenny`m intellektom GPT v Rossii* [Online chat with artificial intelligence GPT in Russia]. URL: <https://gpt-open.ru/chat-gpt-v-rossii/gpt-open> (accessed: 01.12.2023).

8. *Besplatnye resheniya k sborniku zadaniy Kuznecova L. A.* [Free solutions to the collection of tasks Kuznetsova L. A.]. URL: <https://kvadromir.com/kuznecov.html> (accessed: 28.03.2024).

Информация об авторах

Владимир Вячеславович Михаэлис – к.п.н., доцент, доцент кафедры «Информационные системы и защита информации», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: mvv_1967@mail.ru

Светлана Ивановна Михаэлис – к.п.н., доцент, доцент кафедры «Информационные системы и защита информации», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: mihaelis_si@irgups.ru

Authors

Vladimir Vyacheslavovich Mikhaelis – Ph. D., Associate Professor of the Department «Information systems and information protection», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: mvv_1967@mail.ru

Svetlana Ivanovna Mikhaelis – Ph. D., Associate Professor of the Department «Information systems and information protection», Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: mihaelis_si@irgups.ru

Для цитирования

Михаэлис В. В., Михаэлис С.И. Применение искусственного интеллекта при решении математических выражений // «Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами» : электрон. науч. журн. – 2024. – №1. – С.21-26 – Режим доступа: <http://ismm-irgups.ru/toma/121-2024>, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ. (дата обращения: 17.04.2024).

For citations

Mikhaelis V. V., Mikhaelis S.I. Applying artificial intelligence in solving mathematical expressions // *Informacionny`e texnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami*: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal], 2024. No. 1. P. 21-26.