УДК 519.862

С.И. Носков[1]

[1] Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация

ВЫЧИСЛЕНИЕ МИНИМАКСА НА МНОГОГРАННИКЕ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аннотация. Статья посвящена описанию алгоритма вычисления минимакса - такого вектора на допустимом многограннике в задаче линейного программирования, максимальное расстояние от которого до любого другого вектора этого многогранника минимально. Реализация алгоритма сводится к последовательному решению задач линейного и линейно-булевого программирования.

Ключевые слова: минимакс, многогранник, задачи линейного и линейно-булевого программирования.

S. I. Noskov[1]

[1] Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russian Federation

CALCULATION OF THE MINIMAX ON A POLYHEDRON IN A LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

Annotation. The article is devoted to the algorithm for calculating the minimax - such a vector on an admissible polyhedron in a linear programming problem, the maximum distance from which to any other vector of this polyhedron is minimal. The implementation of the algorithm is reduced to the sequential solution of linear and linear-Boolean programming problems.

Keywords: minimax, polyhedron, problems of linear and linear Boolean programming.

Многие математические модели сложных систем представимы в виде задачи ЛП (см., например, [1-3]):

$$cx \to \max_{x \in \mathrm{X}} \mathrm{c}x, \tag{1}$$

$$\mathrm{X}=\{x \in R^n | \mathrm{A}\mathrm{x} \leq b,\, x \geq 0\ \}, \tag{2}$$

где A –матрица размерности m×n.

При этом представление (1), (2) является общим, поскольку к нему с помощью известных приемов легко можно свести задачи на минимум, с другими типами ограничений, отсутствием условия неотрицательности переменных.

На одном многограннике X может быть поставлены различные оптимизационные задачи с разными целевыми функциями: максимизация прибыли, дохода, валового продукта, производительности труда; минимизация затрат, себестоимости, издержек, экологических последствий и т.п. Поэтому важно уметь определять вектор $x^* \in \mathrm{X}$, являющийся в определенной степени компромиссом по отношению ко всему множеству X, а именно - этот вектор должен обладать следующим свойством: максимальное расстояние от него до любого другого вектора из X должно быть минимальным, т.е.

$$x^*=\arg \min_{x \in \mathrm{X}} \left(\max_{y \in \mathrm{X}} \rho(x,y)\right),$$

где $\rho(x,y)$ – функция расстояния между векторами x и y.

Введем обозначение

$$I^*= \max_{y \in \mathrm{X}} \rho(x^*,y).$$

Предлагаемый в настоящей работе алгоритм определения вектора x^* и числа I^* основан на идее, изложенной в работе [4]. Будем в дальнейшем предполагать ограниченность множества X: $x < \infty$ для всех $x \in \mathrm{X}$.

Сформируем вначале множество Y$=\emptyset$ и зададим значение переменной I^*=M, где M – заранее заданное большое положительное число.

Далее организуем следующий итерационный процесс.

Шаг 1. Определим две наиболее удаленные друг от друга вершины $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ многогранника X. С этой целью решим задачу

$$\max_{x,y\in X} \rho(x,y). \tag{3}$$

Вершины $y^{(1)}$ и $y^{(2)}$ включаются в множество Y.

Шаг 2. Определим вектор $\bar{y}\in$ X, максимальное расстояние $\bar{I}$ от которого до любой вершины из множества Y минимально:

$$\min_{x\in X} I, \tag{4}$$

$$\rho\left(x,y^{(j)}\right)\leq I \text{ для всех } y^{(j)}\in Y\ (j=\overline{1,r}), \tag{5}$$

где r – число векторов в множестве Y на данной итерации.

Шаг 3. Находится вершина $y^{(r+1)}\in$ X , характеризующаяся максимальным расстоянием до вектора $\bar{y}$:

$$I^{(r+1)}=\max_{x\in X} \rho(x,\bar{y}). \tag{6}$$

Шаг 4. Производится проверка условий:

a) $y^{(r+1)}\in Y$;

b) $\bar{I}$=$I^{(r+1)}$.

При выполнении хотя бы одного из них вектор $\bar{y}$ объявляется решением исходной задачи, т.е. x^*=$\bar{y}$, I^*=$\bar{I}$. В противном случае вершина $y^{(r+1)}$ включается в множество Y и осуществляется переход на шаг 2.

Конечность данного итерационного процесса следует из конечности числа вершин многогранника X.

Займемся теперь конкретизацией этого процесса.

Примем в качестве функции расстояния $\rho(a,b)$ так называемое манхэттенское (городское) расстояние:

$$\rho(a,b)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|. \tag{7}$$

С помощью известного приема (см., например, [5]) представим модуль в выражении (7) суммой:

$$|a_i\text{-}b_i|=u_i+v_i,$$

где

$$u_i=\begin{cases}a_i-b_i, & a_i>b_i\\ 0, \text{в} & \text{пр.} \quad \text{случае,}\end{cases}$$

$$v_i=\begin{cases}-a_i+b_i, & a_i<b_i\\ 0, \text{в} & \text{пр.} \quad \text{случае.}\end{cases}$$

При этом должно выполняться естественное условие:

$$u_iv_i=0,\ i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

С учетом изложенного задача (3) может быть представлена в виде задачи линейно-булевого программирования (ЛБП):

$$\text{Ax}\leq b, \tag{9}$$

$$\text{Ay}\leq b, \tag{10}$$

$$\text{x-y}+u\text{-}v=0; \tag{11}$$

$$u_i\leq\sigma_i\text{P},\ i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

$$v_i\leq(1-\sigma_i)\text{P},\ \ i=\overline{1,n}, \tag{13}$$

$$x\geq 0,\ \text{y}\geq 0,\ \text{u}\geq 0,\ v\geq 0, \tag{14}$$

$$\sigma_i\in\{0,1\},\ \ i=\overline{1,n}, \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)\rightarrow\max, \tag{16}$$

где P – большое положительное число.

Включение в задачу (9)- (16) ограничений (12), (13), (15) вызвано необходимостью соблюдения условий (8).

Задача (4), (5) принимает вид задачи ЛП:

$$\text{Ax} \leq b, \tag{17}$$

$$\text{x}+u^{(j)}\text{-}v^{(j)}\text{=}y^{(j)},\ j = \overline{1,r}, \tag{18}$$

$$\text{I} - \sum_{i=1}^{n}(u_i^{(j)} + v_i^{(j)}) \geq 0,\ j = \overline{1,r}, \tag{19}$$

$$x \geq 0,\ u^{(j)} \ \geq 0,\ v^{(j)} \ \geq 0,\ j = \overline{1,r}, \tag{20}$$

$$I \to \min. \tag{21}$$

Наконец, задача (6) трансформируется в задачу ЛБП:

$$\text{Ax} \leq b, \tag{22}$$

$$\text{x}+u\text{-}v\text{=}\bar{y}, \tag{23}$$

$$u_i \leq \sigma_i \text{P},\ i = \overline{1,n}, \tag{24}$$

$$v_i \leq (1 - \sigma_i)\text{P},\ \ i = \overline{1,n}, \tag{25}$$

$$\text{x} \geq 0,\ \text{u} \geq 0,\ \text{v} \geq 0, \tag{26}$$

$$\sigma_i \in \{0,1\},\ \ i = \overline{1,n}, \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i) \to \max. \tag{28}$$

Отметим, что необходимость решения задач ЛП (17) – (21) и ЛБП (9)- (16), (22) – (28) при определении минимакса на многограннике X не должна вызывать вычислительных трудностей в силу значительного количества разработанных эффективных программ, например, размещенной в Internet в свободном доступе программы LPSolve.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Витренко В.А., Сыровой Г.В., Синдеева Е.В. Решение задачи оптимизации шпиндельного узла методом ЛП-поиска // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. -2017. -№ 1 (56). -С. 48-53.
2. Слабнов В.Д., Скворцов В.В. Численное определение давления и оптимальных показателей скважин при решении краевых задач двухфазной фильтрации с помощью линейного программирования // Математическое моделирование. -2009. -Т. 21. -№ 11.- С. 83-98.
3. Кувыкин В.И. Оптимальное планирование и анализ моделей непрерывного производства // Автоматизация в промышленности. -2015. -№ 8.- С. 13-17.
4. Головченко В.Б., Носков С.И. Прогнозирование на основе дискретной динамической модели с использованием экспертной информации // Автоматика и телемеханика. -1993.- №10. - С.140-148.
5. Носков С.И. Оценивание параметров аппроксимирующей функции с постоянными пропорциями // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - 2013. - № 2. - С. 135-136.

REFERENCES

1. Vitrenko V.A., Syrovoi G.V., Sindeeva E.V. Solving the problem of optimizing the spindle unit using the LP-search method // Progressive technologies and systems of mechanical engineering. -2017. -No. 1 (56). -FROM. 48-53.
2. Slabnov V.D., Skvortsov V.V. Numerical determination of pressure and optimal performance of wells in solving boundary value problems of two-phase filtration using linear programming // Mathematical Modeling. -2009. -T. 21. - No. 11. - S. 83-98.
3. Kuvykin V.I. Optimal planning and analysis of continuous production models // Automation in industry. -2015. -No. 8.- S. 13-17.
4. Golovchenko V.B., Noskov S.I. Forecasting based on a discrete dynamic model using expert information // Automation and Telemechanics. -1993.- No. 10. - P.140-148.
5. Noskov S.I. Estimation of the parameters of the approximating function with constant proportions // Modern technologies. System analysis. Modeling. - 2013. - No. 2. - S. 135-136.

Информация об авторе

Сергей Иванович Носков – профессор кафедры «Информационные системы и защита информация», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: sergey.noskov.57@mail.ru.

Author

Sergey Ivanovich Noskov – Professor of the Information Systems and Information Security Department, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: sergey.noskov.57@mail.ru.

Для цитирования

Носков С.И. Вычисление минимакса на многограннике в задаче линейного программирования // «Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами»: электрон. науч. журн. – 2022. – №1(13). – С. 1-4 – DOI: 10.26731/2658-3704.2022.1(13).1-4 – Режим доступа: http://ismm-irgups.ru/toma/113-2022, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ. (дата обращения: 08.04.2022)

For citation

Noskov S.I. Calculation of minimax on a polyhedron in a linear programming problem // Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal], 2022. No. 1(13). P. 1-4. DOI: 10.26731/2658-3704.2022.1(13).1-4. [Accessed 08/04/22]