УДК 519.862.6

М. П. Базилевский [1]

[1] *Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Российская Федерация*

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОФАКТОРНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ С ПАРАМЕТРАМИ В ВИДЕ МАТРИЦ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДВУМЕРНОГО ВЕКТОРНОГО ПРОСТРАНСТВА

Аннотация. В данной работе исследуется возможность применения моделей парной линейной с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства на практике. Приведено подробное описание этих моделей, метода их оценивания и алгоритма прогнозирования по ним. Для автоматизации процесса построения таких моделей с помощью эконометрического пакета Gretl был разработан специальный скрипт, по которому осуществлялось моделирование грузооборота железнодорожного транспорта России и экстраполяция его будущих и прошлых значений. При определенных объемах выборки полученные модели оказались гораздо адекватнее обычных моделей парной линейной регрессии. На основе исследования установлены объемы выборок, при которых целесообразно строить модели парной линейной с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства.

***Ключевые слова*:** регрессионная модель, линейный оператор, авторегрессия, метод наименьших квадратов, грузооборот, экстраполяция.

M.P. Bazilevskiy [1]

[1] *Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia*

THE STUDY OF ONE-FACTOR REGRESSION MODELS WITH PARAMETERS IN THE FORM OF LINEAR OPERATORS MATRICES OF TWO-DIMENSIONAL VECTOR SPACE

Abstract. In this paper, we study the possibility of using linear pair models with parameters in the form of linear operators matrices of a two-dimensional vector space in practice. A detailed description of these models, a method for estimating them, and a forecasting algorithm for them are given. To automate the process of constructing such models using the Gretl econometric package, a special script was developed that modeled the freight turnover of Russian railway transport and extrapolated its future and past values. For certain sample sizes, the resulting models turned out to be much more adequate than conventional paired linear regression models. On the basis of the study, the sample sizes were established for which it is advisable to build linear pair models with parameters in the form of linear operators matrices of a two-dimensional vector space.

Keywords: regression model, linear operator, autoregression, ordinary least squares, cargo turnover, extrapolation.

Введение. Регрессионный анализ [1–3] всегда был и на сегодняшний день продолжает оставаться мощным математическим методом моделирования статистических данных и исследования их свойств. Регрессионные модели находят широкое применение в области техники, экономики, бизнеса, социологии, медицины и других отраслях науки. А популяризируемое в настоящее время нейросетевое моделирование, возникшее благодаря развитию вычислительных технологий и ошибочно выдаваемое в средствах массовой информации за искусственный интеллект, сформировалось как раз таки из регрессионного анализа и тесно с ним связано.

Регрессионному анализу посвящено несчетное количество научных работ. Среди них хотелось бы выделить монографию профессора С.И. Носкова [4], в которой приведены методы и программные комплексы реализации основных этапов статистического моделирования объектов различной природы, функционирование которых характеризуется нестабильностью в прошлом и будущем. Работы [5–9] посвящены методам оценивания параметров линейной регрессии: в [5] рассмотрен метод антиробастного оценивания, в [6] – метод смешанного оценивания, в [7–9] – метод множественного оценивания. В статьях [10, 11] описано математическое обеспечение для построения некоторых видов регрессионных моделей: в [10] рассмотрены линейно-мультипликативные регрессии, в [11] – негладкие регрессии. В основе построения таких моделей лежит аппарат линейно-булевого программирования, вопросы применимости которого в регрессионном анализе подробно описаны в монографии [12]. В работах [13, 14] разработаны критерии нелинейности квазилинейных регрессионных моделей. Статьи [15, 16] посвящены оцениванию моделей полносвязной линейной регрессии.

Во всех перечисленных выше литературных источниках [1–16] параметры линейных регрессионных моделей трактуются как матрицы линейных операторов одномерного векторного пространства. В работе [17] рассмотрен математический аппарат для оценивания моделей парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. Установлено, что в случае минимизации суммы квадратов ошибок, т.е. с использованием метода наименьших квадратов (МНК), такое оценивание сводится к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Достоинством предложенных в работе [17] моделей является то, что при прогнозировании значений объясняемой переменной y не требуется задавать прогнозные значения объясняющей переменной x, поскольку они последовательно определяются по модели.

Целью данной работы является исследование возможности применения моделей парной линейной с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства на практике. Исследование проводится на примере моделирования грузооборота железнодорожного транспорта России.

Модели парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. В матричной форме такие модели записываются следующим образом [17]:

$$Y_i^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & 0 \\ 0 & \alpha_{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} X_i^{(2)} + E_i^{(2)}, \qquad i = \overline{1, n-1}, \tag{1}$$

где $Y_i^{(2)} = \begin{pmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, n-1}$ – вектор i-й пары соседних наблюдений объясняемой переменной y;

$X_i^{(2)} = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, n-1}$ – вектор i-й пары соседних наблюдений объясняющей переменной x;

$E_i^{(2)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_i \\ \varepsilon_{i+1} \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, n-1}$ – вектор i-й пары соседних ошибок аппроксимации;

n – объем выборки;

α_{10}, α_{11}, α_{12}, α_{20}, α_{21}, α_{22} – неизвестные параметры.

Модель (1) можно представить в виде системы $2(n-1)$ уравнений:

$$\begin{cases} y_i = \alpha_{10} + \alpha_{11} x_i + \alpha_{12} x_{i+1} + \varepsilon_i, \\ y_{i+1} = \alpha_{20} + \alpha_{21} x_i + \alpha_{22} x_{i+1} + \varepsilon_{i+1}, \end{cases} \qquad i = \overline{1, n-1}. \tag{2}$$

В системе (2) уравнения $y_i = \alpha_{10} + \alpha_{11} x_i + \alpha_{12} x_{i+1} + \varepsilon_i$ фактически представляют собой модель распределенного лага – модель временного ряда, в которой текущие значения ряда y зависят от текущего и будущего значений ряда x. А уравнения $y_{i+1} = \alpha_{20} + \alpha_{21} x_i + \alpha_{22} x_{i+1} + \varepsilon_{i+1}$ представляют собой модель распределенного лага, в которой текущие значения ряда y зависят от текущего и прошлого значений ряда x.

В работе [17] для оценивания модели (2) был использован МНК, состоящий в минимизации функционала:

$$F\left(\alpha_{10},\alpha_{20},\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21},\alpha_{22}\right)=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 \to \min . \tag{3}$$

С учетом системы (2) задачу безусловной оптимизации (3) можно переформулировать в виде задачи условной оптимизации:

$$F=\left(y_1-\alpha_{10}-\alpha_{11}x_1-\alpha_{12}x_2\right)^2+\sum_{i=1}^{n-1}\left(y_{i+1}-\alpha_{20}-\alpha_{21}x_i-\alpha_{22}x_{i+1}\right)^2 \to \min , \tag{4}$$

при $(n-2)$-х линейных ограничениях

$$\alpha_{10}+\alpha_{11}x_{i+1}+\alpha_{12}x_{i+2}=\alpha_{20}+\alpha_{21}x_i+\alpha_{22}x_{i+1}, \qquad i=\overline{1,n-2}. \tag{5}$$

С использованием метода множителей Лагранжа в [17] показано, что решение оптимизационной задачи с целевой функцией (4) и с линейными ограничениями (5) находится из системы линейных алгебраических уравнений с $\left(n+4\right)$ неизвестными:

$$\begin{cases}
2\alpha_{10}+2x_1\alpha_{11}+2x_2\alpha_{12}+\sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i=2y_1,\\
2x_1\alpha_{10}+2x_1^2\alpha_{11}+2x_1x_2\alpha_{12}+\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_{i+1}\lambda_i=2x_1y_1,\\
2x_2\alpha_{10}+2x_1x_2\alpha_{11}+2x_2^2\alpha_{12}+\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_{i+2}\lambda_i=2x_2y_1,\\
2\left(n-1\right)\alpha_{20}+2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\alpha_{21}+2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\alpha_{22}-\sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i=2\sum\limits_{i=2}^{n}y_i,\\
2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\alpha_{20}+2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2\alpha_{21}+2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}\alpha_{22}-\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_i\lambda_i=2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_iy_{i+1},\\
2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\alpha_{20}+2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}\alpha_{21}+2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i^2\alpha_{22}-\sum\limits_{i=1}^{n-2}x_{i+1}\lambda_i=2\sum\limits_{i=2}^{n}x_iy_i,\\
\alpha_{10}+\alpha_{11}x_{i+1}+\alpha_{12}x_{i+2}-\alpha_{20}-\alpha_{21}x_i-\alpha_{22}x_{i+1}=0, \qquad i=\overline{1,n-2}.
\end{cases} \tag{6}$$

Если определитель основной матрицы системы (6) отличен от нуля, то задача (4) при ограничениях (5) будет иметь единственное решение.

Пусть оцененная модель (2) имеет вид:

$$\begin{cases}
\tilde{y}_i=\tilde{\alpha}_{10}+\tilde{\alpha}_{11}x_i+\tilde{\alpha}_{12}x_{i+1},\\
\tilde{y}_{i+1}=\tilde{\alpha}_{20}+\tilde{\alpha}_{21}x_i+\tilde{\alpha}_{22}x_{i+1},
\end{cases} \qquad i=\overline{1,n-1}, \tag{7}$$

где $\tilde{\alpha}_{10}$, $\tilde{\alpha}_{20}$, $\tilde{\alpha}_{11}$, $\tilde{\alpha}_{12}$, $\tilde{\alpha}_{21}$, $\tilde{\alpha}_{22}$ – оценки параметров α_{10}, α_{20}, α_{11}, α_{12}, α_{21}, α_{22}; $\tilde{y}_i$, $i=\overline{1,n}$ – расчетные значения переменной y.

Тогда прогнозирование будущих значений объясняемой переменной y по регрессии (7) осуществляется следующим образом [17].

1. С использованием n-го наблюдаемого значения x_n объясняющей переменной и n-го расчетного значения $\tilde{y}_n$ объясняемой переменной находится $\left(n+1\right)$-е прогнозное значение $\tilde{x}_{n+1}$ объясняющей переменной по формуле $\tilde{x}_{n+1}=\dfrac{\tilde{y}_n-\tilde{\alpha}_{10}-\tilde{\alpha}_{11}x_n}{\tilde{\alpha}_{12}}$, $\tilde{\alpha}_{12}\neq 0$.

2. С использованием $\tilde{x}_{n+1}$ определяется прогнозное значение $\tilde{y}_{n+1}$ объясняемой переменной по формуле $\tilde{y}_{n+1}=\tilde{\alpha}_{20}+\tilde{\alpha}_{21}x_n+\tilde{\alpha}_{22}\tilde{x}_{n+1}$.

3. Предыдущие шаги повторяются заданное количество раз.

Аналогичным образом по регрессии (7) можно экстраполировать прошлые значения объясняемой переменной y. Для этого с использованием 1-го наблюдаемого значения x_1 объясняющей переменной и 1-го расчетного значения $\tilde{y}_1$ объясняемой переменной находится 0-е значение $\tilde{x}_0$ объясняющей переменной по формуле $\tilde{x}_0 = \dfrac{\tilde{y}_1 - \tilde{\alpha}_{20} - \tilde{\alpha}_{22} x_1}{\tilde{\alpha}_{21}}$, $\tilde{\alpha}_{21} \neq 0$. Затем определяется 0-е значение $\tilde{y}_0$ объясняемой переменной по формуле $\tilde{y}_0 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11}\tilde{x}_0 + \tilde{\alpha}_{12} x_1$.

Моделирование грузооборота железнодорожного транспорта России. Вопросам моделирования и прогнозирования показателей функционирования железнодорожного транспорта России посвящены, например, работы [18–20]. Для построения моделей парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства (2) были использованы статистические данные за 1990–2018 годы из работы [20] по следующим двум показателям:

y – грузооборот железнодорожного транспорта России (млрд т км);

x – ВВП России (млрд долл., в ценах 1990 г.).

Для автоматизации процесса построения моделей (2) с использованием эконометрического пакета Gretl был разработан специальный скрипт. Он позволяет по любой выборке заданного объема n, состоящей из двух переменных x и y, сформировать и решить систему (6), т.е. найти оценки модели (2), и автоматически осуществить экстраполяцию на 3 шага в прошлое и в будущее.

Сначала с использованием разработанного скрипта модель (2) оценивалась по данным за период 1990–2018 годы, т.е. по всей выборке объема $n = 29$. В результате была получена регрессия:

$$\tilde{Y}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1,4622 & 0 \\ 0 & -1,4622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,5598 & 0 \\ 0 & 3,5598 \end{pmatrix} X^{(2)} \tag{8}$$

или

$$\begin{cases} \tilde{y}_i = -1,4622 + 3,5598 x_i, \\ \tilde{y}_{i+1} = -1,4622 + 3,5598 x_{i+1}, \end{cases} \qquad i = \overline{1,28}, \tag{9}$$

в которой оценки $\tilde{\alpha}_{12} = 0$, $\tilde{\alpha}_{21} = 0$, а все множители Лагранжа λ_i, $i = \overline{1,27}$ оказались отличны от 0.

Оказалось, что оценки регрессии (9) $\tilde{\alpha}_{10} = \tilde{\alpha}_{20} = -1,4622$ и $\tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{22} = 3,5598$ совпадают с МНК-оценками построенной в работе [20] модели парной линейной регрессии. Таким образом, модель (9) равносильна оцененной с помощью МНК парной регрессии. При этом в регрессии (9) оценки $\tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{21} = 0$, поэтому становится невозможно определять будущие и прошлые значения объясняющей переменной x, т.е. невозможно использовать эту модель для экстраполяции значений объясняемой переменной y. Отсюда можно сделать вывод, что модели парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства целесообразно строить для выборок только определенного объема n.

Для исследования влияния объема выборки n на оценки модели (2) было решено последовательно оценивать её при $n = 2, 3, 4, \ldots, 26$. Для того, чтобы была возможность сравнивать наблюдаемые и прогнозные по модели (2) значения переменных y и x на будущие 3 года, из общей выборки были исключены наблюдения за 2016–2018 годы. Поэтому для построения регрессии при $n = 2$ использовались наблюдения за 2014–2015 годы, при $n = 3$ – за 2013–2015 годы и т.д. Для каждой построенной модели определялись расчетные значения объясняемой переменной y, а также осуществлялась экстраполяция значений переменных y и x на 3 года в будущее и в прошлое.

Получилось, что при $n=2$ и при $n=3$ определитель основной матрицы системы (6) равен 0, поэтому она либо вовсе не имеет решений, либо имеет бесчисленное множество решений.

По выборке за 2012–2015 годы объема $n=4$ была построена следующая регрессия:

$$\tilde{Y}^{(2)}=\begin{pmatrix}5741,554 & 0\\ 0 & -6146,962\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1,1 & -4,156\\ 11,087 & 1,484\end{pmatrix}X^{(2)}, \tag{10}$$

при этом множители Лагранжа $\lambda_1=\lambda_2=0$.

Расчетные по модели (10) значения переменной y полностью совпадают с её наблюдаемыми значениями, т.е. все ошибки этой регрессии равны 0. Для сравнения, оцененная по той же выборке модель парной линейной регрессии имеет вид $\tilde{y}=3298,64-1,5693x$ и, судя по значению её коэффициента детерминации $R^2=0,107$, примерно в 10 раз меньшего, чем для регрессии (10), существенно уступает ей по адекватности. Этот результат можно объяснить тем, что модель (10) содержит в себе больше параметров, чем парная линейная регрессия.

Наблюдаемые и прогнозные по модели (10) значения переменных y и x на период 2016–2018 гг. представлены в таблице 1, а их экстраполированные на период 2009–2011 гг. значения – в таблице 2.

Таблица 1

Прогнозы на 2016–2018 годы

Год	$x_{набл}$	$x_{расч}$	$y_{набл}$	$y_{расч}$
2016	656,6	654,916	2342,6	2027,739
2017	666,5	720,177	2491,4	2183,554
2018	679,2	665,396	2596,4	2825,823

Таблица 2

Экстраполяция на 2009–2011 годы

Год	$x_{набл}$	$x_{расч}$	$y_{набл}$	$y_{расч}$
2009	587,9	666,675	1865,3	2229,275
2010	614,4	668,566	2011,3	2237,327
2011	640,6	666,128	2127,8	2254,672

По таблицам 1 и 2 видно, что экстраполяция по модели (10), построенной на основе всего лишь четырех наблюдений, дает хоть и не выдающиеся, но весьма приемлемые результаты, хорошо согласующиеся с реальными данными.

По выборке за 2011–2015 годы объема $n=5$ была построена следующая регрессионная модель:

$$\tilde{Y}^{(2)}=\begin{pmatrix}-442,526 & 0\\ 0 & 1780,559\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3,897 & 0,108\\ 2,109 & -1,387\end{pmatrix}X^{(2)}, \tag{11}$$

при этом множители Лагранжа $\lambda_1=12,176$, $\lambda_2=-8,524$, $\lambda_3=-0,178$.

Наблюдаемые за 2011–2015 годы значения объясняемой переменной y и её расчетные по модели (11) значения за тот же период приведены в таблице 3. В ней же содержатся расчетные значения для построенной по тем же данным линейной регрессии $\tilde{y}=796,758+2,172x$, коэффициент детерминации которой $R^2=0,183$.

Таблица 3

Наблюдаемые, расчетные по модели (11) и по линейной регрессии значения переменной y

Год	$y_{набл}$	$y_{расч}$ для регрессии (11)	$y_{расч}$ для линейной регрессии
2011	2127,8	2126,063	2188,1
2012	2222,4	2212,752	2235,9
2013	2196,2	2247,094	2254,8
2014	2298,6	2259,9	2263,5
2015	2304,8	2303,991	2207,6

Используя таблицу 3, можно определить остатки моделей. Так, для линейной регрессии они составляют

$$e_1 = -60,3, \quad e_2 = -13,5, \quad e_3 = -58,6, \quad e_4 = 35,1, \quad e_5 = 97,2,$$

а для регрессии (11)

$$e_1 = 1,737, \quad e_2 = 9,648, \quad e_3 = -50,894, \quad e_4 = 38,7, \quad e_5 = 0,809.$$

По остаткам видно, что модель (11) адекватнее линейной регрессии. Также можно заметить, что сумма остатков модели (11) равна 0, т.е. для неё справедливо основное тождество дисперсионного анализа [12]. На основании этого для регрессии (11) был вычислен коэффициент детерминации $R^2 = 0,809$, значение которого оказалось более чем в 4 раза больше, чем для линейной модели.

Наблюдаемые и прогнозные по модели (11) значения переменных y и x на период 2016–2018 гг. представлены в таблице 4, а их экстраполированные на период 2008–2010 гг. значения – в таблице 5.

Таблица 4

Прогнозы на 2016–2018 годы

Год	$x_{набл}$	$x_{расч}$	$y_{набл}$	$y_{расч}$
2016	656,6	1980,509	2342,6	403,379
2017	666,5	-63411,004	2491,4	93929,912
2018	679,2	3150793,678	2596,4	-4503145

Таблица 5

Экстраполяция на 2008–2010 годы

Год	$x_{набл}$	$x_{расч}$	$y_{набл}$	$y_{расч}$
2009	587,9	90,372	1865,3	-42,09
2010	614,4	444,727	2011,3	1354,233
2011	640,6	585,04	2127,8	1907,133

По таблицам 4 и 5 можно видеть, что экстраполяция по модели (11) дала очень плохие результаты. В таблице 4 прогнозные значения переменной x не являются устойчивыми, что приводит к неустойчивости прогнозных значений переменной y. То же самое, но в умеренной степени, можно наблюдать в таблице 5.

Дальнейшее оценивание модели (2) при $n \geq 6$ всегда приводило к следующему результату: оценки $\tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{21} = 0$, а оценки $\tilde{\alpha}_{10} = \tilde{\alpha}_{20}$ и $\tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{22}$ были равны МНК-оценкам соответствующих моделей парной линейной регрессии. Таким образом, при $n \geq 6$ модель (2) всегда оказывалась равносильной оцененной с помощью МНК парной регрессии.

Исследование системы линейных алгебраических уравнений (6). Умножим первое уравнение системы (6) на x_1 и вычтем его из второго. Аналогично умножим первое уравнение на x_2 и вычтем его из третьего. Тогда система линейных алгебраических уравнений (6) примет вид:

$$\begin{cases} 2\alpha_{10} + 2x_1\alpha_{11} + 2x_2\alpha_{12} + \sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i = 2y_1, \\ \sum\limits_{i=1}^{n-2}\left(x_{i+1} - x_1\right)\lambda_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n-2}\left(x_{i+2} - x_2\right)\lambda_i = 0, \\ 2\left(n-1\right)\alpha_{20} + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\alpha_{21} + 2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\alpha_{22} - \sum\limits_{i=1}^{n-2}\lambda_i = 2\sum\limits_{i=2}^{n}y_i, \\ 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i\alpha_{20} + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_i^2\alpha_{21} + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}\alpha_{22} - \sum\limits_{i=1}^{n-2}x_i\lambda_i = 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_iy_{i+1}, \\ 2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i\alpha_{20} + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}\alpha_{21} + 2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i^2\alpha_{22} - \sum\limits_{i=1}^{n-2}x_{i+1}\lambda_i = 2\sum\limits_{i=2}^{n}x_iy_i, \\ \alpha_{10} + \alpha_{11}x_{i+1} + \alpha_{12}x_{i+2} - \alpha_{20} - \alpha_{21}x_i - \alpha_{22}x_{i+1} = 0, \qquad i = \overline{1, n-2}. \end{cases} \tag{12}$$

Рассмотрим далее систему (12) для конкретных значений объема выборки n.

Если $n = 2$, то система (12) содержит 6 неизвестных и 4 уравнения, т.е. ранг её основной матрицы $r \le 4$ всегда меньше числа неизвестных. Следовательно, если система (12) и совместна, то никогда не может являться определенной и иметь единственное решение.

Если $n = 3$, то система (12) содержит 7 неизвестных и 7 уравнений. Её второе и третье уравнения имеют вид $\left(x_2 - x_1\right)\lambda_1 = 0$ и $\left(x_3 - x_2\right)\lambda_1 = 0$. Отсюда следует, что если $x_2 - x_1 \ne 0$ или $x_3 - x_2 \ne 0$, то $\lambda_1 = 0$. Тогда, исключив второе и третье уравнения, система (12) будет иметь 6 неизвестных и 5 уравнений, т.е. в случае совместности не будет определенной. А если $x_2 - x_1 = 0$ и $x_3 - x_2 = 0$, то, исключив второе и третье уравнения, система (12) будет иметь 7 неизвестных и 5 уравнений, т.е. снова не будет определенной в случае совместности.

Таким образом, найдено объяснение, почему при моделировании грузооборота при $n = 2$ и $n = 3$ определитель основной матрицы системы был равен 0. Потому что при $n = 2$ и $n = 3$ система (6) всегда либо не имеет решений, либо является неопределенной.

Если $n = 4$, то система (12) содержит 8 неизвестных и 8 уравнений. Её второе и третье уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \left(x_2 - x_1\right)\lambda_1 + \left(x_3 - x_1\right)\lambda_2 = 0, \\ \left(x_3 - x_2\right)\lambda_1 + \left(x_4 - x_2\right)\lambda_2 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Система (13) является однородной и в ней число уравнений равно числу неизвестных. Обозначим её определитель $\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ x_3 - x_2 & x_4 - x_2 \end{vmatrix}$. Тогда, если $\Delta \ne 0$, то система (13) имеет единственное тривиальное решение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Исключая второе и третье уравнения, в системе (12) останется 6 неизвестных и 6 уравнений, т.е. она может быть определенной. Если же $\Delta = 0$, то система (13) имеет бесчисленное множество ненулевых решений, а её строки являются линейно зависимыми, поэтому одно из её уравнений можно исключить. Тогда система (12) будет иметь 8 неизвестных и 7 уравнений, т.е. никогда не может быть определенной.

Заметим, что для модели (10) величина определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 8,7 & 12,7 \\ 4 & -21,7 \end{vmatrix} = -239,59$, поэтому при её оценивании множители Лагранжа оказались равны 0.

Если $n \geq 5$, то система (12) содержит $(n+4)$ неизвестных и $(n+4)$ уравнения. Её второе и третье уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n-2} (x_{i+1} - x_1)\lambda_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n-2} (x_{i+2} - x_2)\lambda_i = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Если ранг матрицы системы (14) равен 1, то одно из её уравнений можно исключить. Тогда система (12) будет иметь $(n+4)$ неизвестных и $(n+3)$ уравнений, т.е. она никогда не может быть определенной. А если ранг матрицы системы (14) равен 2, то из неё нельзя исключить одно из уравнений, поэтому система (12) может быть определенной.

Обобщив вышесказанное, можно сделать следующий вывод: если $n \leq 3$, то найти оценки неизвестных параметров модели (2) не представляется возможным; а если $n \geq 4$, то единственные оценки параметров модели (2) могут существовать тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы (14) равен 2.

Выясним теперь, почему при $n \geq 6$ модель (2) равносильна оцененной с помощью МНК парной регрессии. Напомним, что оценки модели (2) удовлетворяют ограничениям (5), которые можно переписать в виде однородной системы:

$$(\alpha_{10} - \alpha_{20}) + (\alpha_{11} - \alpha_{22})x_{i+1} + \alpha_{12}x_{i+2} - \alpha_{21}x_i = 0, \qquad i = \overline{1, n-2}. \tag{15}$$

Пусть $A_0 = \alpha_{10} - \alpha_{20}$, $A_1 = \alpha_{11} - \alpha_{22}$, $A_2 = \alpha_{12}$, $A_3 = -\alpha_{21}$. Тогда выражение (15) можно представить в виде:

$$A_0 + A_1 x_{i+1} + A_2 x_{i+2} + A_3 x_i = 0, \qquad i = \overline{1, n-2}. \tag{16}$$

Очевидно, что при $4 \leq n \leq 5$ ранг основной матрицы системы (16) меньше числа неизвестных, поэтому она всегда имеет бесчисленное множество решений. А если при $n \geq 6$ ранг основной матрицы системы (16) равен 4, то она имеет единственное тривиальное решение $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Отсюда следует, что при $n \geq 6$ оценки модели (2) $\tilde{\alpha}_{10} = \tilde{\alpha}_{20}$, $\tilde{\alpha}_{11} = \tilde{\alpha}_{22}$, $\tilde{\alpha}_{12} = \tilde{\alpha}_{21} = 0$. С использованием этих равенств, система (6) принимает вид:

$$\begin{cases} 2\alpha_{10} + 2x_1\alpha_{11} + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i = 2y_1, \\ 2x_1\alpha_{10} + 2x_1^2\alpha_{11} + \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1}\lambda_i = 2x_1 y_1, \\ 2x_2\alpha_{10} + 2x_1 x_2\alpha_{11} + \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+2}\lambda_i = 2x_2 y_1, \\ 2(n-1)\alpha_{10} + 2\sum_{i=2}^{n} x_i\alpha_{11} - \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i = 2\sum_{i=2}^{n} y_i, \\ 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i\alpha_{10} + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}\alpha_{11} - \sum_{i=1}^{n-2} x_i\lambda_i = 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1}, \\ 2\sum_{i=2}^{n} x_i\alpha_{10} + 2\sum_{i=2}^{n} x_i^2\alpha_{11} - \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1}\lambda_i = 2\sum_{i=2}^{n} x_i y_i. \end{cases} \tag{17}$$

Прибавляя первое уравнение системы (17) к четвертому, а второе к шестому, можно получить систему для оценок $\tilde{\alpha}_{10}$ и $\tilde{\alpha}_{11}$:

$$\begin{cases} n\alpha_{10} + \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_{11} = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_{10} + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\alpha_{11} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases} \quad (18)$$

Решение системы (18) даёт МНК-оценки модели парной линейной регрессии y от x.

Таким образом, если ранг основной матрицы системы (16) равен 4, то при $n \geq 6$ модель (2) равносильна оцененной с помощью МНК парной регрессии. В этом случае невозможно экстраполировать значения объясняющей переменной x, а значит, пропадает необходимость в построении модели парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. Из этого можно сделать вывод, что модели (2) целесообразно строить только при $4 \leq n \leq 5$.

И в завершение рассмотрим еще некоторые особенности моделей парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства. Модели (2) оцениваются с помощью минимизации функции (4) при ограничениях (5). Выразив из (5) значение x_{i+2}, получим:

$$x_{i+2} = \frac{(\alpha_{20} - \alpha_{10}) + \alpha_{21}x_i + (\alpha_{22} - \alpha_{11})x_{i+1}}{\alpha_{12}}, \qquad i = \overline{1, n-2}. \quad (19)$$

Выражение (19) представляет собой авторегрессионный процесс второго порядка, но без ошибок аппроксимации. Это означает, что оценки модели (2) находятся так, чтобы одновременно минимизировать её сумму квадратов ошибок и при этом связать значения x_{i+2}, x_{i+1} и x_i функциональной зависимостью. Используя авторегрессию (19) при $\tilde{\alpha}_{12} \neq 0$, по второму уравнению оцененной модели (7) можно получить прогнозное значение $\tilde{y}_{i+2} = \tilde{\alpha}_{20} + \tilde{\alpha}_{21}x_{i+1} + \tilde{\alpha}_{22}\dfrac{(\alpha_{20} - \alpha_{10}) + \alpha_{21}x_i + (\alpha_{22} - \alpha_{11})x_{i+1}}{\alpha_{12}}$. Заметим, что точно так же часто поступают исследователи при прогнозировании по модели парной линейной регрессии, а именно, если неизвестны будущие значения переменной x, то чтобы их получить прибегают к моделированию авторегрессионного процесса p-го порядка:

$$x_i = a_0 + a_1x_{i-1} + a_2x_{i-2} + \ldots + a_p x_{i-p} + \varepsilon_i, \qquad i = \overline{1, \tau}, \quad (20)$$

где τ – объем выборки. При этом для получения МНК-оценок модели (20) должно выполняться условие $\tau \geq p+1$, т.е. объем выборки должен быть не меньше, чем число параметров авторегрессии (20). В противном случае, т.е. при $\tau < p+1$, МНК-оценки неидентифицируемы. А модель (2) наоборот строится при условии, когда $\tau \leq p+1$, т.е. при $n-2 \leq 3$ или при $n \leq 5$.

Поясним теперь, почему в модели (11), построенной по выборке объема $n = 5$ за 2011–2015 годы, прогнозные значения переменных y и x оказались неустойчивыми. При $n = 5$ для авторегрессии (20) второго порядка число параметров $p+1 = 3$ и объем выборки $\tau = 3$. Следовательно, число степеней свободы этой модели равно 0, а её МНК-оценивание дает авторегрессию идеального качества, в которой все остатки равны 0:

$$x_{i+2} = 20509,74 - 48,757x_{i+1} + 19,463x_i.$$

Известно, что применение таких идеальных моделей на другой выборке может приводить к явному рассогласованию наблюдаемых и расчетных значений переменной x. Вот поэтому при построении модели (2) прогнозные значения переменной x оказались неустойчивыми.

Заключение. В данной работе достаточно подробно исследована возможность применения моделей парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства на практике. Установлено, что такие модели целесообразно строить только по выборкам объема $4 \le n \le 5$. При $n = 4$ была оценена модель (10), превосходящая классическую парную регрессию по коэффициенту детерминации примерно в 10 раз и показавшая приемлемые результаты при экстраполировании. При $n = 5$ была получена модель (11), значение коэффициента детерминации которой оказалось более чем в 4 раза больше, чем для соответствующей парной регрессии, но показавшая при экстраполировании неустойчивость значений переменных y и x. В дальнейшем автор планирует исследовать модели парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов трехмерного векторного пространства, которые могут применяться для выборок большего объема.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Harrell Jr., Frank E. Regression modeling strategies: with applications to linear models, logistic and ordinal regression, and survival analysis. 2nd edition. – Springer Series in Statistics, 2015. – 607 p.

2. Mendenhall W., Sincich T.T. A second course in statistics: regression analysis. 8th edition. – Pearson, 2019. – 848 p.

3. Darlington R.B., Hayes A.F. Regression analysis and linear models: concepts, applications, and implementations. – The Guilford Press, 2016. – 661 p.

4. Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. – Иркутск: Облинформпечать, 1996. – 321 с.

5. Носков С.И. Метод антиробастного оценивания параметров линейной регрессии: число максимальных по модулю ошибок аппроксимации // Южно-Сибирский научный вестник. – 2020. – № 1 (29). – С. 51–54.

6. Носков С.И. О методе смешанного оценивания параметров линейной регрессии // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. – 2019. – № 1 (2). – С. 41–45.

7. Носков С.И., Базилевский М.П. Множественное оценивание параметров и критерий согласованности поведения в регрессионном анализе // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2018. – Т. 22. – № 4 (135). – С. 101–110.

8. Носков С.И., Баенхаева А.В. Множественное оценивание параметров линейного регрессионного уравнения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 3 (51). – С. 133–138.

9. Баенхаева А.В., Базилевский М.П., Носков С.И. Моделирование валового регионального продукта Иркутской области на основе применения методики множественного оценивания регрессионных параметров // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 10-1. – С. 9–14.

10. Базилевский М.П., Носков С.И. Формализация задачи построения линейно-мультипликативной регрессии в виде задачи частично-булевого линейного программирования // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2017. – № 3 (55). – С. 101–105.

11. Иванова Н.К., Лебедева С.А., Носков С.И. Идентификация параметров некоторых негладких регрессий // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. – 2016. – № 17. – С. 107–110.

12. Носков С.И., Базилевский М.П. Построение регрессионных моделей с использованием аппарата линейно-булевого программирования. – Иркутск: ИрГУПС, 2018. – 176 с.

13. Базилевский М.П. Критерии нелинейности многофакторных квазилинейных регрессий // Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований. – 2019. – С. 210–213.

14. Базилевский М.П. Критерии нелинейности квазилинейных регрессионных моделей // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2018. – Т. 6. – № 4 (23). – С. 185–195.

15. Базилевский М.П. Синтез модели парной линейной регрессии и простейшей EIV-модели // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 1 (24). – С. 170–182.

16. Базилевский М.П. Исследование двухфакторной модели полносвязной линейной регрессии // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2019. – Т. 7. – № 2 (25). – С. 80–96.

17. Базилевский М.П., Власенко Л.Н. Оценивание моделей парной линейной регрессии с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2020. – Т. 8. – № 1. Доступно по: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/02/BazilevskiySoavtori_1_20_1.pdf DOI: 10.26102/2310-6018/2020.28.1.015

18. Базилевский М.П., Врублевский И.П., Носков С.И., Яковчук И.С. Среднесрочное прогнозирование эксплуатационных показателей функционирования Красноярской железной дороги // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 10-3. – С. 471–476.

19. Базилевский М.П., Гефан Г.Д. Проблема автокорреляции остатков регрессии на примере моделирования грузооборота железнодорожного транспорта по данным временных рядов // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. – 2016. – № 1 (49). – С. 141–147.

20. Базилевский М.П. Прогнозирование грузооборота железнодорожного транспорта по регрессионным моделям с детерминированными и стохастическими объясняющими переменными // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Экономика. Информатика. – 2019. – Т. 46. – № 1. – С. 117–129.

REFERENCES

1. Harrell Jr., Frank E. Regression modeling strategies: with applications to linear models, logistic and ordinal regression, and survival analysis. 2nd edition. Springer Series in Statistics, 2015. 607 p.

2. Mendenhall W., Sincich T.T. A second course in statistics: regression analysis. 8th edition. Pearson, 2019. 848 p.

3. Darlington R.B., Hayes A.F. Regression analysis and linear models: concepts, applications, and implementations. The Guilford Press, 2016. 661 p.

4. Noskov S.I. *Tehnologija modelirovanija ob'ektov s nestabil'nym funkcionirovaniem i neopredelennost'ju v dannyh* [Modeling technology for objects with unstable operation and data uncertainty]. Irkutsk, RIC GP «Oblinformpechat'» Publ., 1996. 321 p.

5. Noskov S.I. *Metod antirobastnogo otsenivaniya parametrov lineynoy regressii: chislo maksimal'nykh po modulyu oshibok approksimatsii* [Method of antirobast estimation of linear regression parameters: number of maximum of the module of approximation errors]. *Yuzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik* [South Siberian Scientific Bulletin]. 2020, no. 1, vol. 29, pp. 51–54.

6. Noskov S.I. *O metode smeshannogo otsenivaniya parametrov lineynoy regressii* [About the method of mixed estimation of parameters of linear regression]. *Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal* [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal]. 2019, no. 1, vol. 2, pp. 41–45.

7. Noskov S.I., Bazilevskiy M.P. *Mnozhestvennoe otsenivanie parametrov i kriteriy soglasovannosti povedeniya v regressionnom analize* [Multiple parameter estimation and behavior consistency criterion in regression analysis]. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Proceedings of ISTU]. 2018, no. 4, vol. 135, pp. 101–110.

8. Noskov S.I., Baenhaeva A.V. *Mnozhestvennoe otsenivanie parametrov lineynogo regressionnogo uravneniya* [Multiple estimation of parameters for the linear regression equation]. *Sov-*

remennye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovanie [Modern technologies. System analisys. Modeling]. 2016, no. 3, vol. 51, pp. 133-138.

9. Baenhaeva A.V., Bazilevskiy M.P., Noskov S.I. *Modelirovanie valovogo regional'nogo produkta Irkutskoy oblasti na osnove primeneniya metodiki mnozhestvennogo otsenivaniya regressionnykh parametrov* [Modeling of gross regional product Irkutsk region of the basis of methods of multiple estimation of regression parameters]. *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental research]. 2016, no. 10-1, pp. 9–14.

10. Bazilevskiy M.P., Noskov S.I. *Formalizatsiya zadachi postroeniya lineyno-mul'tiplikativnoy regressii v vide zadachi chastichno-bulevogo lineynogo programmirovaniya* [Formalization of the problem of construction of linear multiplicative regressions in the form of a partial-Boolean linear programming problem]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovanie* [Modern technologies. System analisys. Modeling]. 2017, no. 3, vol. 55, pp. 101–105.

11. Ivanova N.K., Lebedeva S.A., Noskov S.I. *Identifikatsiya parametrov nekotorykh negladkikh regressiy* [Identification of parameters of some nonsmooth regressions]. *Informatsionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh system* [Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems]. Irkutsk, 2016, vol. 17, pp. 107–110.

12. Noskov S.I., Bazilevskiy M.P. *Postroenie regressionnykh modeley s ispol'zovaniem apparata lineyno-bulevogo programmirovaniya* [Construction of regression models using linear Boolean programming]. Irkutsk, IrGUPS, 2018. 176 p.

13. Bazilevskiy M.P. *Kriterii nelineynosti mnogofaktornykh kvazilineynykh regressiy* [Nonlinearity criteria for multivariate quasilinear regressions]. *Molodezh' i nauka: aktual'nye problemy fundamental'nykh i prikladnykh issledovaniy* [Youth and science: actual problems of fundamental and applied research]. 2019, pp. 210–213.

14. Bazilevskiy M.P. *Kriterii nelineynosti kvazilineynykh regressionnykh modeley* [Nonlinearity criteria for quasilinear regression models]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information technologies]. 2018, no. 4, vol. 23, pp. 185–195.

15. Bazilevskiy M.P. *Sintez modeli parnoy lineynoy regressii i prosteyshey EIV-modeli* [Synthesis of the paired linear regression model and the simplest EIV model]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information technologies]. 2019, no. 1, vol. 24, pp. 170–182.

16. Bazilevskiy M.P. *Issledovanie dvukhfaktornoy modeli polnosvyaznoy lineynoy regressii* [Study of a two-factor model of fully connected linear regression]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information technologies]. 2019, no. 2, vol. 25, pp. 80–96.

17. Bazilevskiy M.P., Vlasenko L.N. *Otsenivanie modeley parnoy lineynoy regressii s parametrami v vide matrits lineynykh operatorov dvumernogo vektornogo prostranstva* [Estimation of pair linear regression models with parameters in the form of linear operator matrices of two-dimensional vector space]. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii* [Modeling, optimization and information technologies]. 2010, no. 1, available at: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2020/02/BazilevskiySoavtori_1_20_1.pdf DOI: 10.26102/2310-6018/2020.28.1.015

18. Bazilevskiy M.P., Vrublevskiy I.P., Noskov S.I., Yakovchuk I.S. *Srednesrochnoe prognozirovanie ekspluatatsionnykh pokazateley funktsionirovaniya Krasnoyarskoy zheleznoy dorogi* [Medium-term forecasting of performance indicators of functioning of Krasnoyarsk railway]. *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental research]. 2016, no. 10-3. – pp. 471-476.

19. Bazilevskiy M.P., Gefan G.D. *Problema avtokorrelyatsii ostatkov regressii na primere modelirovaniya gruzooborota zheleznodorozhnogo transporta po dannym vremennykh ryadov* [The problem of autocorrelation in regression residuals by example of modeling rail freight based on time series data]. *Sovremennye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovanie* [Modern technologies. System analisys. Modeling]. 2016, no. 1, vol. 49, pp. 141–147.

20. Bazilevskiy M.P. *Prognozirovanie gruzooborota zheleznodorozhnogo transporta po regressionnym modelyam s determinirovannymi i stokhasticheskimi ob"yasnyayushchimi peremennymi* [Prediction of freight turnover of railway transport using regression models with deterministic and stochastic explanatory variables]. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika. Informatika* [Bulletin of BSU. Ser. Economics. Informatics]. 2019, no. 1, pp. 117–129.

Информация об авторах

Михаил Павлович Базилевский – к. т. н., доцент, доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, e-mail: mik2178@yandex.ru

Authors

Mikhail Pavlovich Bazilevskiy – Ph. D. in Engineering Science, Associate Professor, the Subdepartment of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, e-mail: mik2178@yandex.ru

Для цитирования

Базилевский М.П. Исследование однофакторных регрессионных моделей с параметрами в виде матриц линейных операторов двумерного векторного пространства // «Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами»: электрон. науч. журн. – 2020. – №2(7). – С. 1-13 – DOI: 10.26731/2658-3704.2020.2(7).1-13 – Режим доступа: http://ismm-irgups.ru/toma/27-2020, свободный. – Загл. с экрана. – Яз. рус., англ. (дата обращения: 01.06.2020)

For citations

Bazilevskiy M.P. The study of one-factor regression models with parameters in the form of linear operators matrices of two-dimensional vector space // Informacionnye tehnologii i matematicheskoe modelirovanie v upravlenii slozhnymi sistemami: ehlektronnyj nauchnyj zhurnal [Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems: electronic scientific journal], 2020. No. 2(7). P. 1-13. DOI: 10.26731/2658-3704.2020.2(7).1-13 [Accessed 01/06/20]